§2.1. Приклад, що приводить до поняття потрійного інтеграла

Розглянемо ***задачу про масу матеріального тіла.*** Нехай масу розподілено по замкненій кубовній (такій, що має об'єм) області (V) з густиною $\rho = \rho(x, y, z)$. Треба знайти масу заданого матеріального тіла.

Відомо, що маса однорідного матеріального тіла з густиною $\rho = \rho_0$, де $\rho_0 = const$, визначається за формулою $m = \rho_0 V$, де V - об'єм тіла. Для неоднорідного тіла обчислювати масу таким способом не можна. Тому застосуємо метод, аналогічний методу знаходження об'єму тіла.

Розіб'ємо тіло (V) сіткою поверхонь довільно на n частин (V_k), $k = 0,1,\ldots,n-1$, попарно без спільних внутрішніх точок, об'єми цих частин позначимо через ΔV_k, $k = 0,1,\ldots,n-1$. В кожній області (V_k) виберемо довільним чином точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$.

Припустимо, що густина в кожній області (V_k) стала і дорівнює $\rho(x_k, y_k, z_k)$. Тоді величина $\rho(x_k, y_k, z_k)\cdot\Delta V_k$ є наближеним значенням маси тієї частини тіла, яка займає область (V_k), а сума $S = \sum_{k=0}^{n-1}\rho(x_k, y_k, z_k)\cdot\Delta V_k$ наближено визначає масу всього тіла. Точне значення маси заданого тіла отримаємо, якщо в сумі S перейти до границі при умові, що $d = \max_{1\le k\le n} diam(V_k) \to 0$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, тобто

$$m = \lim_{d\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\rho(x_k, y_k, z_k)\cdot\Delta V_k\,. \qquad (*)$$

Таким чином, Приклад знаходження маси тіла зводиться до знаходження границі вигляду (*), яка пов'язана з поняттям потрійного інтегралу.

§2.2. Потрійний інтеграл та умови його існування

Нехай функцію $u = f(x, y, z)$ визначено в замкненій обмеженій кубовній області $(V) \subset R^3$. Розіб'ємо область (V) сіткою поверхонь на n довільних частин (V_k), $k = 0,1,\ldots,n-1$, (T-розбиття області (V)), об'єми яких позначимо через ΔV_k відповідно. У кожній області (V_k), $k = 0,1,\ldots,n-1$, візьмемо довільну точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, і складемо суму

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta V_k . \qquad (44)$$

Суму S називають *інтегральною сумою* для функції $f(x, y, z)$ в області (V), складеною для даного T-розбиття області (V) і заданого вибору точок $M_k \in (V_k)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Нехай $d_k = diam\,(V_k)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, $d(T) = \max\limits_{1 \le k \le n} d_k$.

Якщо при $d(T) \to 0$ інтегральні суми (44) мають границю, рівну числу I, то це число називають *потрійним інтегралом від функції* $f(x, y, z)$ *в області* (V) і позначають

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dV \text{ або } \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dxdydz .$$

Таким чином, $\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dxdydz = \lim\limits_{d(T)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$. Якщо ця границя існує, то функцію $f(x, y, z)$ називають *інтегровною за Ріманом* в області (V).

Справедлива теорема, яка є достатньою умовою інтегрованості функції:

Теорема. *Будь- яка функція* $f(x, y, z)$, *неперервна в замкненій обмеженій кубовній області* (V), *інтегровна в цій області.*

Потрійний інтеграл є узагальненням подвійного інтеграла на випадок функції трьох змінних. Теорія потрійного інтеграла, в більшості випадків, аналогічна теорії подвійного інтеграла. Тому властивості потрійних інтегралів аналогічні властивостям подвійних і доречним є зупинитися лише на питанні про обчислення потрійних інтегралів.

§2.3. Обчислення потрійних інтегралів

Теорема (про обчислення потрійного інтегралу в прямокутному паралелепіпеді). *Нехай функція* $f(x,y,z)$ *інтегровна в прямокутному паралелепіпеді* $(P)=\{(x,y,z): a_1 \le x \le b_1, a_2 \le y \le b_2, a_3 \le z \le b_3\}$. *Якщо для кожної фіксованої точки* (x,y) *прямокутника* $(D)=\{(x,y): a_1 \le x \le b_1, a_2 \le y \le b_2\}$ *існує інтеграл* $F(x,y)=\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz$, *то існує також і подвійний інтеграл* $\iint\limits_{(D)} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz$, *причому* $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz$.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми про зведення подвійного інтегралу до повторного у випадку прямокутної області інтегрування. Якщо до умов цієї теореми додати умову існування інтегралу $\int\limits_{a_2}^{b_2} F(x,y)dy$ для кожної фіксованої точки $x \in [a_1, b_1]$, то існуватиме повторний інтеграл $\int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} F(x,y)dy$.

Тоді справедлива формула

$$\iiint\limits_{(P)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz.$$

Зауваження. Можна отримати формули зведення потрійного інтеграла до повторного, де інтегрування відбувається по змінним x, y та z у тій чи іншій послідовності. Зокрема, при обчисленні потрійного інтеграла по області (P) від неперервної функції $f(x,y,z)$ порядок інтегрування у повторному інтегралі по змінних x, y і z може бути довільним.

Теорема (про обчислення потрійного інтегралу по довільній області). *Якщо функція* $f(x,y,z)$ *інтегровна в обмеженій області* (V), *яка визначається нерівностями* $z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)$, $y_1(x)\le y\le y_2(x)$, $a\le x\le b$, *де* $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ *- неперервні функції, і для кожної фіксованої точки* $(x,y)\in(D)=\{y_1(x)\le y\le y_2(x), a\le x\le b\}$, *існує інтеграл* $F(x,y)=\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, *то існує також і подвійний інтеграл*

$\iint\limits_{(D)} F(x,y)dxdy=\iint\limits_{(D)} dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, *причому*

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_{(D)} dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\ .$$

Теорему сприймаємо без доведення (рис. 20).

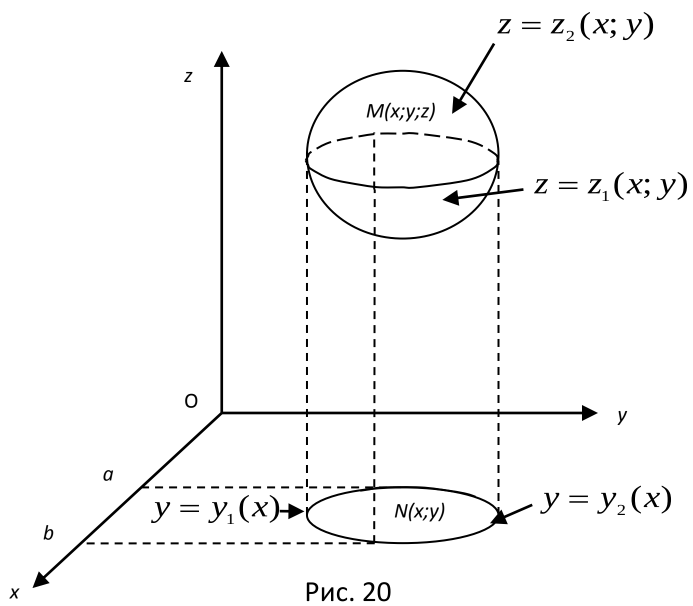

Рис. 20

Аналогічно можна отримати інші формули обчислення потрійного інтеграла, в яких інтегрування по змінних x, y і z здійснюється в іншому порядку.

§2.4. Побудова поверхонь та тіл, обмежених цими поверхнями в декартових координатах.

Введемо означення основних понять, які будуть використовуватись у подальшому.

Поверхнею називають множину точок, координати яких задовольняють рівняння $F(x, y, z) = 0$ [1, 176]. Окрім вказаного вище неявного способу задання поверхня може бути задана явно, якщо одну із змінних, наприклад *z*, можна виразити через інші: $z = f(x, y)$.

Тілом називається зв'язний простір, обмежений замкненою поверхнею. Іноді тілом називають компактну множину, що має внутрішні точки. У підручниках з елементарної геометрії тіло визначається як «частина простору, обмежена з усіх сторін». У «Початках» Евкліда тілом називається «те, що має довжину, ширину і глибину» [15, 138].

У даному параграфі розглянемо деякі поверхні до другого порядку включно та тіла, що обмежені цими поверхнями.

Почнемо з найпростішого вигляду поверхні – площини. Площиною називають множину точок, що задовольняють рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ [1, 176].

Якщо $A = 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$, то площина паралельна вісі *OX*, якщо $A \neq 0, B = 0, C \neq 0, D \neq 0$, то площина паралельна вісі *OY*, якщо $A \neq 0, B \neq 0, C = 0, D \neq 0$, то площина паралельна вісі *OZ*.

Якщо $A = 0, B \neq 0, C \neq 0, D = 0$, то площина включає вісь *OX*, якщо $A \neq 0, B = 0, C \neq 0, D = 0$, то площина включає вісь *ОУ*, якщо $A \neq 0, B \neq 0, C = 0, D = 0$, то площина включає вісь *OZ*.

Якщо $A = 0, B = 0, C \neq 0, D \neq 0$, то площина паралельна координатній площині *ОХУ*, якщо $A \neq 0, B = 0, C = 0, D \neq 0$, то площина паралельна координатній площині *OYZ*, якщо $A = 0, B \neq 0, C = 0, D \neq 0$, то площина паралельна координатній площині *OXZ*.

Якщо $A = 0, B = 0, C \neq 0, D = 0$, то маємо рівняння самої координатної площини *ОХУ*, при $A \neq 0, B = 0, C = 0, D = 0$ отримуємо координатну площину *OYZ*, якщо $A = 0, B \neq 0, C = 0, D = 0$, то дана площина є площиною *OXZ*.

Площину також можна задати рівнянням у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (2.1)$$

Це задання є зручним для побудови. Якщо площину задано рівнянням 2.1, то у просторі вона будується так, як показано на рисунку 2.1.

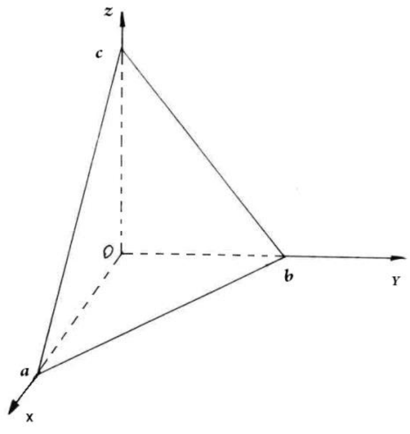

рис. 2.1

Розглянемо поверхні другого порядку. Всі поверхні другого порядку можна утворити рухом прямої(твірної) або лінії другого порядку. Зазначимо, що найпростішими виглядами рухів є обертання і паралельне перенесення.

Більшість поверхонь другого порядку отримують обертанням ліній другого порядку навколо осі і рівномірним стисненням або розтягненням одержаної поверхні обертання в певному напрямі. Слід зауважити, що існують виключення. Так, наприклад, гіперболічний параболоїд не належить до даної групи поверхонь, бо його не можна утворити обертанням, а лише паралельним перенесенням параболи.

Загалом, поверхнею другого порядку називають множину всіх точок простору, координати яких задовольняють рівняння другого степеня:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0 \quad , \qquad (2.2)$$

де $a_{11}, a_{22}, ..., a_{00}$ - дійсні числа, і не всі коефіцієнти при членах другого степеня дорівнюють нулю.

У даному параграфі не буде розглядатися дослідження загального рівняння поверхні другого порядку. Розглянемо лише основні типи таких поверхонь, використовуючи їх канонічні рівняння.

Дамо означення поверхні обертання.

Означення. Поверхню, яка разом з кожною своєю точкою містить все коло, яке отримали обертанням цієї точки навколо деякої фіксованої прямої *d*, називають поверхнею обертання [1, 218].

Пряму *d*, навколо якої виконують обертання, називають віссю обертання. Обертання точки навколо вісі відбувається в площині, перпендикулярній до вісі. В перетині поверхні обертання площинами, перпендикулярними до вісі обертання отримуються кола, які називають паралелями. Площини, що проходять через вісь обертання, перетинають поверхню обертання по лініям, які називають меридіанами.

Будь-яке рівняння вигляду $x^2 + y^2 = f(z)$ є рівнянням поверхні обертання навколо осі *OZ*.

Зауваження. Аналогічно знаходимо рівняння поверхонь обертання лінії навколо осей *OX* і *OY*.

До поверхонь обертання належать деякі конічні і циліндричні поверхні.

Дамо означення циліндричній поверхні.

Означення. Поверхня, яка має властивість ту, що разом з кожною своєю точкою *M* вона включає всю пряму, що проходить через *M*, паралельну ненульовому вектору $\vec{p}$, називається циліндричною поверхнею або циліндром [1, 221].

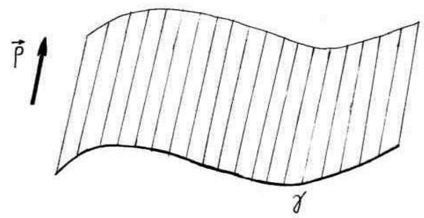

рис. 2.2

Прямі, що належать циліндричній поверхні і паралельні вектору $\vec{p}$, називаються твірними цієї поверхні.

Циліндрична поверхня може бути утворена наступним чином. Нехай γ - деяка лінія, а $\vec{p}$ - ненульовий вектор. Поверхня, що утворена всіма прямими, кожна з яких проходить через деяку точку лінії γ паралельно вектору $\vec{p}$, буде циліндричною (рис.2.2). В цьому випадку γ буде називатись напрямною поверхні і є справедливим твердження: якщо в просторі дана прямокутна система координат *OXYZ* і в площині *OXY* лінія задана рівнянням

$$F(x, y) = 0, \qquad (2.3)$$

то це рівняння визначає в просторі циліндричну поверхню з твірними паралельними вісі *OZ*.

Зауваження. Якщо рівняння $G(x,y)=0$ в площині *OXZ* визначає лінію γ', то це рівняння в просторі визначає циліндричну поверхню, в якої твірні паралельні осі *OY*. Аналогічно рівняння $H(x,y)=0$ в площині *OYZ* визначає лінію γ'', а в просторі – циліндричну поверхню з твірною, паралельною осі *OX*.

Якщо рівняння (2.3) є рівнянням другого порядку відносно x і y (тобто γ - лінія другого порядку), то циліндрична поверхня з напрямною γ і твірними, паралельними осі *OZ*, є циліндричною поверхнею другого порядку або циліндром другого порядку. Якщо напрямною циліндра є еліпс, гіпербола, парабола, то цей циліндр називається еліптичним, гіперболічним, параболічним відповідно. Можливий випадок, коли циліндр другого порядку розпадається на пару площин.

Якщо вибрати прямокутну систему координат так, щоб твірні циліндра були паралельні осі *OZ*, а напрямна γ в площині *OXY* мала канонічне рівняння, то вказані вище циліндричні поверхні визначаються наступними рівняннями:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **- еліптичний циліндр (рис.2.3).**

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **- гіперболічний циліндр (рис.2.4).**

$y^2=2px$ **- параболічний циліндр (рис.2.5).**

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ **- циліндр, що розпадається на пару площин, що перетинаються по осі *OZ* (рис. 2.6).**

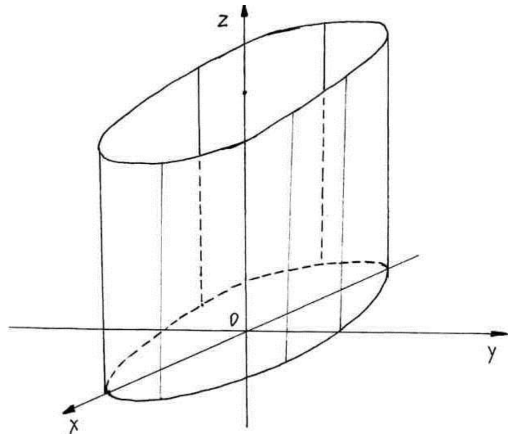

рис. 2.3

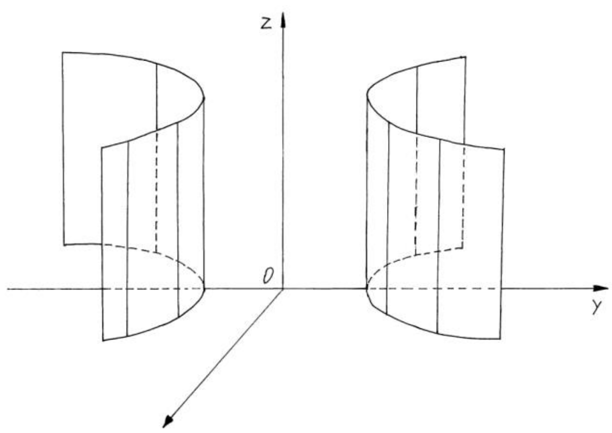

рис.2.4

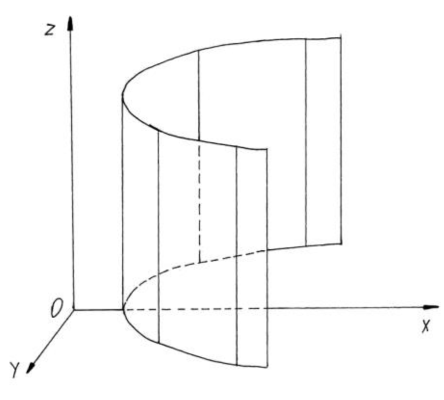

рис. 2.5

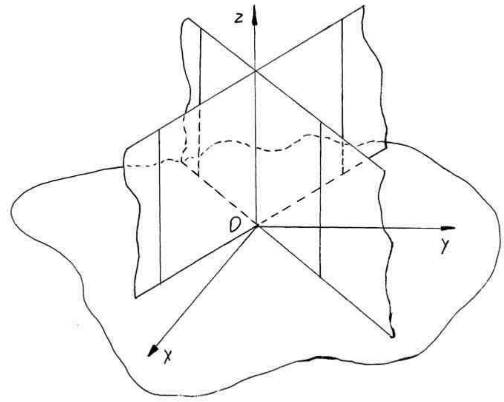

рис. 2.6

$\begin{matrix} x^2 - a^2 = 0 \\ a \neq 0 \end{matrix}$ **- циліндр, що розпадається на пару паралельних площин (рис.2.7).**

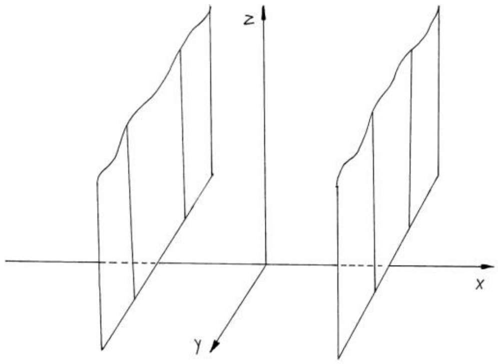

рис. 2.7

$x^2 = 0$ - циліндр, що являє собою пару співпадаючих площин.

Ці рівняння називаються канонічними рівняннями відповідних циліндричних поверхонь другого порядку.

<u>Зауваження</u>. Якщо в канонічному рівнянні еліптичного циліндра $a = b$, то напрямною циліндра є коло $x^2 + y^2 = a^2$. В такому випадку поверхня є циліндром обертання.

Розглянемо конічні поверхні.

<u>Означення</u>. Конічною поверхнею або конусом з вершиною в точці M_0 називається поверхня, яка має властивість, що разом з кожною своєю точкою M, відмінною від точки M_0, ця поверхня містить пряму M_0M [1, 223].

Прямі, що проходять через вершину конуса і лежать на ньому, називаються твірними цього конуса.

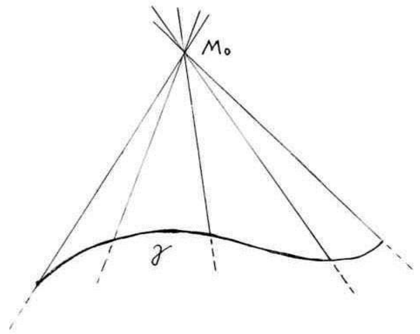

рис. 2.8

Конічну поверхню можна утворити наступним чином. Розглянемо в просторі лінію γ і точку M_0 , що не лежить на цій лінії. Поверхня, утворена всіма прямими, кожна з яких проходить через точку M_0 і через деяку точку лінії γ, є конічною поверхнею з вершиною M_0 (рис. 2.8)

У цьому випадку лінія γ називається напрямною.

Якщо напрямною поверхні є еліпс, заданий у площині OXY, то рівняння конічної поверхні має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

У випадку, коли напрямною поверхні другого порядку є коло, тобто, коли $a=b$, останнє рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

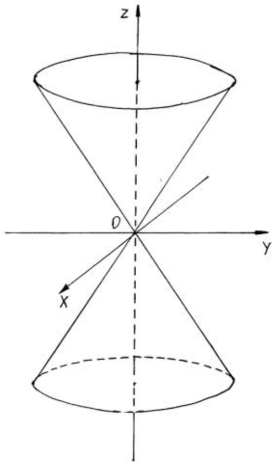

рис. 2.9

Поверхня, визначена цим рівнянням в прямокутній системі координат, називається круговою конічною поверхнею або **круговим конусом** (рис. 2.9).

Очевидно, що ця поверхня утворена при обертанні навколо осі *OZ* прямої, що лежить в площині *OXZ*.

Розглянемо три типи поверхонь: еліпсоїди, гіперболоїди та параболоїди.

Еліпсоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ . \qquad (2.4)$$

Це рівняння є канонічним рівнянням еліпсоїда [1, 228].

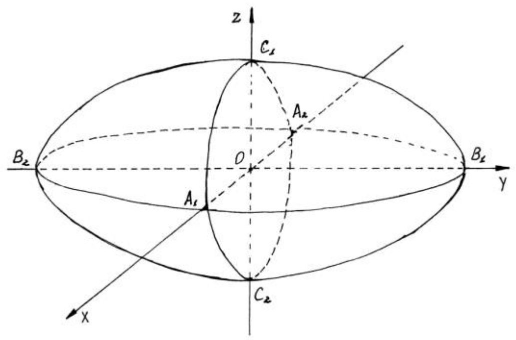

рис.2.10

Якщо $a \neq b, b \neq c, c \neq a$, то еліпсоїд називається трьохосним. Додатні числа a, b, c називають півосями еліпсоїда. У трьохосного еліпсоїда шість вершин: $A_1(a,0,0), A_2(-a,0,0), B_1(0,b,0), B_2(0,-b,0), C_1(0,0,c), C_2(0,0,-c)$. Так як у рівняння (2.4) змінні *x, y* і *z* входять у парних степенях, то поверхня є симетричною відносно координатних площин, осей координат і початку координат.

У перетині з будь-якою площиною еліпсоїд дає еліпс. Дослідивши дану поверхню методом перерізів, переконуємося, що якщо еліпсоїд задається рівнянням (2.4), то його зображають так, як показано на рис.2.10. Якщо хоча б одна із змінних - дорівнює нулю, то еліпсоїд вироджується у пару уявних прямих на площині.

Якщо дві півосі еліпсоїда рівні, то він називається еліпсоїдом обертання і має канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Якщо всі три вісі еліпсоїда рівні, тобто $a = b = c$, то він являє собою сферу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Гіперболоїди розрізняють однопорожнинні та двопорожнинні.

Однопорожнинним гіперболоїдом (рис. 2.11) називається поверхня, яка у деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (2.5)$$

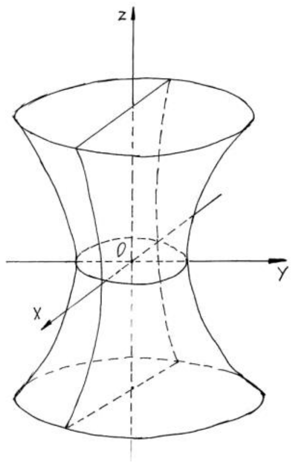

рис. 2.11

Це рівняння є канонічним рівнянням для однопорожнинного гіперболоїда.

Оскільки у рівняння (2.5) змінні *x, y* і *z* входять у парних степенях, то поверхня симетрична відносно координатних площин, осей координат і початку координат. Дві осі *OX* і *OY* перетинають поверхню у точках $A_1(a,0,0), A_2(-a,0,0), B_1(0,b,0), B_2(0,-b,0)$. Ці осі називають дійсними осями однопорожнинного гіперболоїда, а вказані точки – його вершинами. Третя вісь симетрії не має спільних точок з однопорожнинним гіперболоїдом і називається його уявною віссю. Додатні числа a,b,c називають півосями однопорожнинного гіперболоїда.

Якщо у рівнянні (2.5) $a=b$, то отримаємо рівняння поверхні:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

яка називається однопорожнинним гіперболоїдом обертання.

Двопорожнинним гіперболоїдом (рис. 2.12) називається поверхня, яка у деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (2.6)$$

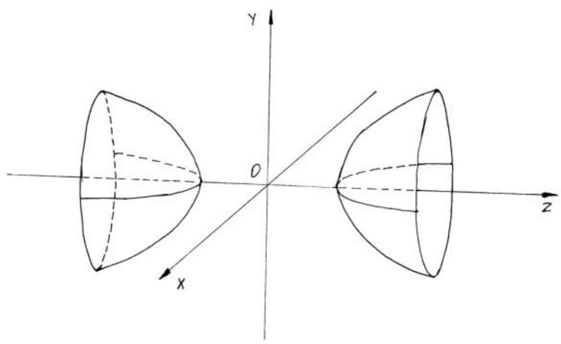

рис. 2.12

Рівняння(2.8) називається канонічним рівнянням двопорожнинного гіперболоїда. Дослідимо властивості даної поверхні.Вона симетрична відносно координатних площин, осей координат і початку координат. Вісь OZ перетинає поверхню у вдох точках $C_1(0,0,c), C_2(0,0,-c)$, що називаються вершинами двопорожнинного гіперболоїда. Сама ця пряма називається дійсною віссю. Осі симетрії OX і $OУ$ не мають з поверхнею спільних точок і називаються уявними осями. Додатні числа a,b,c називають півосями двопорожнинного гіперболоїда.

Якщо у рівнянні (2.6) $a=b$, то отримаємо рівняння поверхні вигляду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

яка називається двопорожнинним гіперболоїдом обертання.

Гіперболоїди розрізняють еліптичні і гіперболічні.

<u>Означення.</u> **Еліптичним параболоїдом** називається поверхня, яка у деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z. \qquad (2.7)$$

Це рівняння називається канонічним рівнянням еліптичного параболоїда.

Так як у рівняння (2.7) змінні *x*, *y* входять у парних степенях, то поверхня симетрична відносно площин *OXZ*, *OYZ* і відносно вісі *OZ* (вісь поверхні). Еліптичний параболоїд не симетричний відносно площини *OXУ*, відносно вісей *OX*, *OУ* і початку координат. Точка перетину еліптичного параболоїда з його віссю називається вершиною. Якщо поверхня задана канонічним рівнянням (2.7), то вершина співпадає з початком координат. Для всіх точок еліптичного параболоїда, заданого рівнянням (2.7), виконуються співвідношення $z \geq 0$, при чому $z = 0$ виконується тільки для вершини.

Якщо у рівнянні (2.7) $a = b$, то отримаємо рівняння поверхні у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 2z \ ,$$

яка називається параболоїдом обертання.

Еліптичний параболоїд зображений на рисунку 2.13.

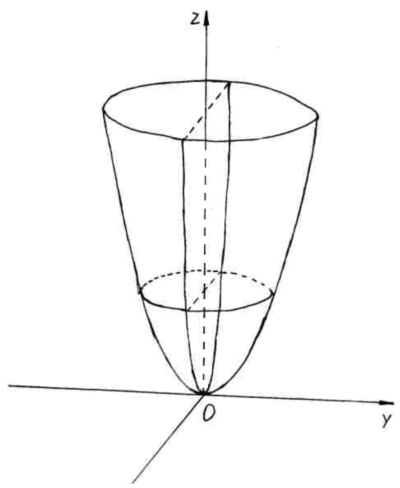

рис. 2.13

<u>Означення.</u> **Гіперболічним параболоїдом** називається поверхня, яка у деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \, . \qquad (2.8)$$

Це рівняння називається канонічним рівнянням гіперболічного параболоїда. Як і у випадку еліптичного параболоїда змінні *x, y* входять у рівняння у парних степенях, і поверхня симетрична відносно площин *OXZ*, *OYZ* і відносно вісі *OZ* (вісь поверхні). Ця поверхня не симетрична відносно площини *OXУ*, відносно вісей *OX*, *OУ* і початку координат. Точка перетину гіперболічного параболоїда з його віссю називається вершиною. Якщо поверхня задана канонічним рівнянням (2.8), то вершина співпадає з початком координат.

Гіперболічний параболоїд зображений на рисунку 2.14.

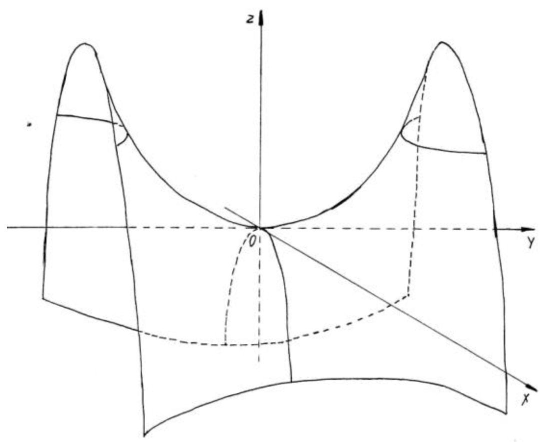

рис. 2.14

При побудові будь-якої поверхні застосовують метод перерізів.

При використанні даного методу зручно використовувати прямокутну систему координат. Суть методу перерізів полягає в наступному. Поверхню перетинаємо площинами, паралельними координатним площинам, або самими координатними площинами. Знаходимо лінії перетину поверхні з даними площинами і по вигляду цих ліній формуємо твердження про форму поверхні.

Нехай поверхня *S* задана в прямокутній системі координат деяким рівнянням. Для дослідження поверхні визначимо деяку послідовність дій.

1. Визначаємо, чи є поверхня симетричною відносно координатних площин.
2. Знаходимо точки перетину поверхні з осями координат.
3. Знаходимо лінії перетину поверхні з координатними площинами.
4. Якщо по лініях перетину поверхні з координатними площинами не можна встановити вигляд поверхні, то визначають лінії перетину поверхні з площинами, що паралельні координатним.

Розглянемо приклад. Нехай деяка поверхня задана рівнянням вигляду

$$4(x^2 + y^2) = z^2.$$

Побудуємо дану поверхню, використовуючи **метод перерізів**.

1. Дана поверхня є симетричною відносно всіх координатних площин, оскільки змінні *x*, *y* і *z* входять у рівняння поверхні тільки у другому степені.

2. а) Знаходимо точки перетину з координатною віссю *OZ*.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \end{cases}$$

Такою точкою є точка, що співпадає з початком координат O(0, 0, 0).

б) Відшукаємо точки перетину з координатною віссю *OУ*.

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \end{cases}$$

Такою точкою є точка, що співпадає з початком координат O(0, 0, 0).

в) Знаходимо точки перетину з координатною віссю *OX*.

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \end{cases}$$

Такою точкою є точка, що співпадає з початком координат O(0, 0, 0).

3. а) Знайдемо рівняння перетину поверхні та площини $z = 0$.

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \end{cases}$$

Перетином є точка O(0, 0, 0).

б) Знайдемо рівняння перетину поверхні та площини $x = 0$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \end{cases}$$

Перетином є лінії $z = \pm 2y$.

в) Визначимо рівняння перетину поверхні та площини $y = 0$.

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \end{cases}$$

Перетином є лінії $z = \pm 2x$.

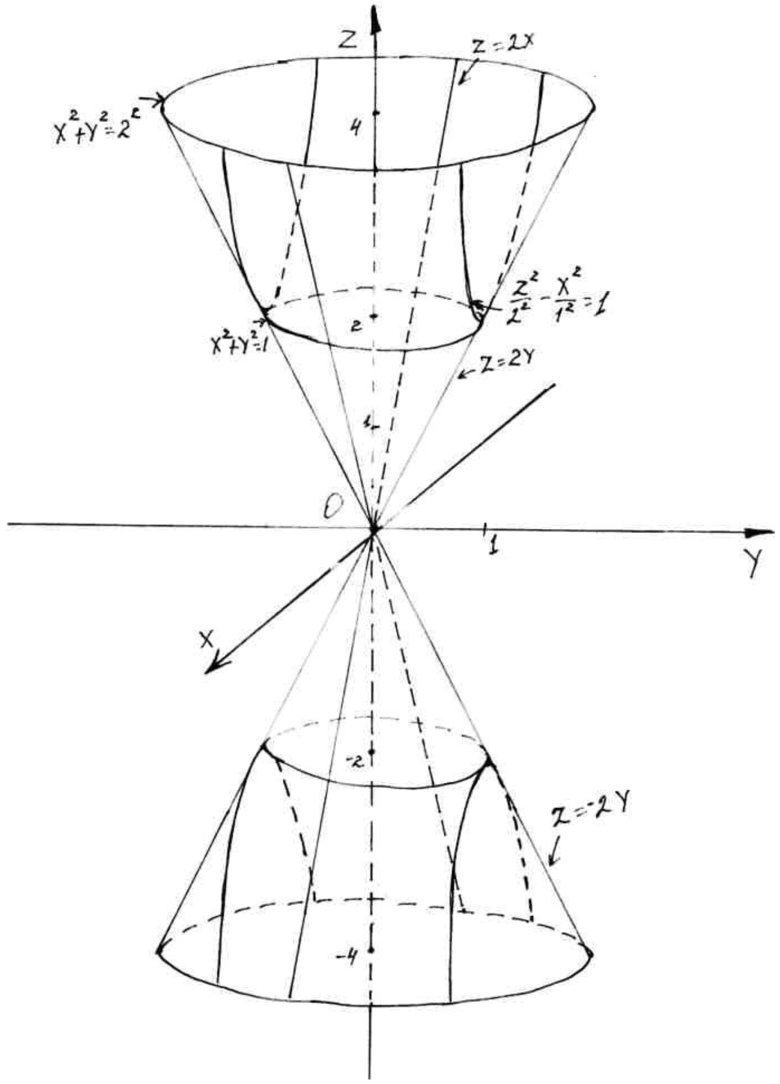

рис. 2.15

4. а) Знайдемо перетин з площинами $z = 2$ і $z = -2$:

$$\begin{cases} z = 2 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -2 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \end{cases}$$

Отримуємо рівняння кола $x^2 + y \quad = 1$.

б) Знайдемо перетин з площинами $z = 4$ і $z = -4$:

$$\begin{cases} z = 4 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -4 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \end{cases}$$

Отримуємо рівняння кола $x^2 + y \quad = 2^2$.

в) Знайдемо перетин з площинами $z = 1$ і $z = -1$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -1 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0 \end{cases}$$

Отримуємо рівняння гіперболи $\dfrac{z^2}{2^2} - \dfrac{x^2}{1^2} = 1$.

Побудувавши всі перерізи в декартовій системі координат, зображаємо шукану поверхню:

Для того, щоб зобразити тіло зображають поверхні, що обмежують його та лінії перерізів цих поверхонь.

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(T)} xdxdydz$, де область (T) обмежена площинами $x = 0,\ y = 0,\ z = 0, y = h,\ x + z = a$.

Розв'язання. Зробивши рисунок 2.16, можна помітити, що дана область інтегрування обмежена зверху площиною $x + z = a$, знизу – площиною $z = 0$, тому для змінної z маємо нерівності: $0 \le z \le a - x$. Проекцією даного тіла в площині xOy є прямокутник $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le h$. Тому отримаємо

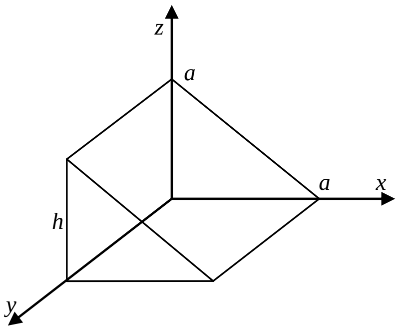

Рис. 2.16

$$\iiint\limits_{(T)} xdxdydz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^h dy \int\limits_0^{a-x} xdz =$$

$$= \int\limits_0^a xdx \int\limits_0^h dy \cdot z\Big|_0^{a-x} = \int\limits_0^a x(a-x)dx \cdot y\Big|_0^h =$$

$$= h\int\limits_0^a \left(ax - x^2\right)dx = h\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ha^3}{6}.$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(T)} ze^{x+y}dxdydz$, якщо область (T) обмежена поверхнями $x = 2$, $x = 3$, $y^2 + z^2 = 1$, $z = 0$ $(z > 0)$.

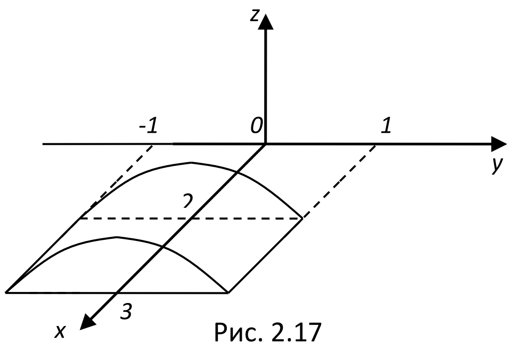

Рис. 2.17

Розв'язання. Область (T) зображена на рисунку 2.17. Маємо $0 \le z \le \sqrt{1-y^2}$, $-1 \le y \le 1$, $2 \le x \le 3$.

Тоді перейдемо до обчислення повторного інтеграла:

$$\iiint\limits_{(T)} ze^{x+y}dxdydz = \iint\limits_{(D)} e^{x+y}dxdy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_2^3 e^x dx \int\limits_{-1}^1 e^y\left(1-y^2\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^3 - e^2\right)\int\limits_{-1}^1 e^y\left(1-y^2\right)dy = \begin{vmatrix} u = 1-y^2, & du = -2ydy, \\ dv = e^y dy, & v = e^y, \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^3 - e^2\right)\left((1-y^2)e^y\Big|_{-1}^1 + 2\int\limits_{-1}^1 ye^y dy\right) = \frac{1}{2}\left(e^3 - e^2\right)\cdot 2\int\limits_{-1}^1 ye^y dy =$$

$$= \begin{vmatrix} u = y, & du = dy, \\ dv = e^y dy, & v = e^y \end{vmatrix} = e^2(e-1)\left(ye^y\Big|_{-1}^1 - \int\limits_{-1}^1 e^y dy\right) = e^2(e-1)\cdot\frac{2}{e} = 2e(e-1).$$

§2.5. Заміна змінних у потрійному інтегралі

Нехай неперервні та диференційовні функції

$$x = x(u,v,w),\ \ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$$

взаємно однозначно відображають область (V) на область (V'). Введемо до розгляду визначник

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

який по аналогії з двомірним випадком називається *якобіаном відображення*. Якщо $I \neq 0$ в області (V), то справедлива формула заміни змінних у потрійному інтегралі:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(T')} f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right) \cdot |I|\, dudvdw.$$

Вивід цієї формули аналогічний виводу формули заміни змінних для подвійного інтеграла.

Змінні u, v, w називають *криволінійними координатами* точки (x,y,z), а вираз $|I(u,v,w)|dudvdw$ - *елементом об'єму* в криволінійних координатах.

Розглянемо два випадки найбільш вживаних на практиці криволінійних координат: циліндричні та сферичні.

Циліндричними координатами точки $M(x,y,z)$ називають числа ρ, φ, z, де ρ і φ - полярні координати точки (x,y) (рис.2.18). Тоді $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, де $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \rho < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$. Якобіан переходу має вигляд $I(\rho,\varphi,z) = \rho$. Тому формула заміни змінних у циліндричних координатах має вигляд

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(T')} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, .$$

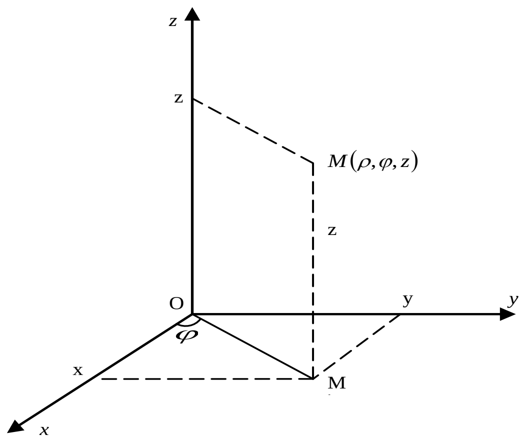

Рис. 2.18

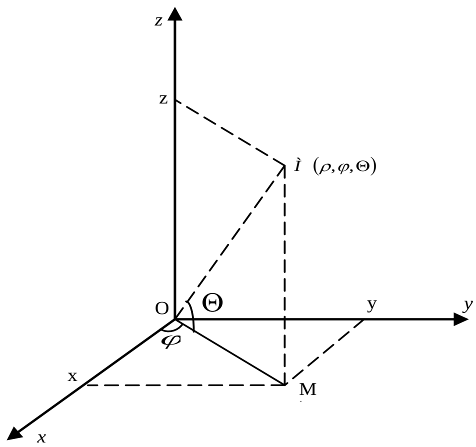

Рис. 2.19

Сферичними координатами точки $M(x,y,z)$ називають числа ρ,φ,θ, де θ - кут між віссю Ox і радіусом-вектором OM точки M, ρ - довжина цього радіуса-вектора, φ - кут між проекцією OB радіуса-вектора OM на площину xOy і віссю Ox (рис. 2.19). Маємо $OB = \rho\sin\theta$, і тому

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = \rho\cos\theta,$$

де $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Якобіан цього перетворення $I(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2\sin\theta$, тому формула заміни змінних в сферичних координатах має вигляд

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(T')} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\cdot\rho^2\sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta.$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(G)} zdxdydz$, де *(G)* – область, що обмежена сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ та параболоїдом обертання $x^2 + y^2 = 3z$.

Розв'язання. Рівняння $x^2+y^2+z^2=4$ визначає сферу із центром у початку координат і радіусом R=2, друга поверхня $x^2+y^2=3z$ є параболоїд обертання навколо осі Oz (рис.2.20). Побудуємо область *(G)* та її проекцію (D) на площину xOy.

Для визначення області (D) розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4-z^2 \\ x^2+y^2=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-z^2=3z \\ x^2+y^2=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2-3z-4=0 \\ x^2+y^2=3z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z_1=1, z_2=-4(\text{не підходить}) \\ x^2+y^2=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=3z \end{cases}$$

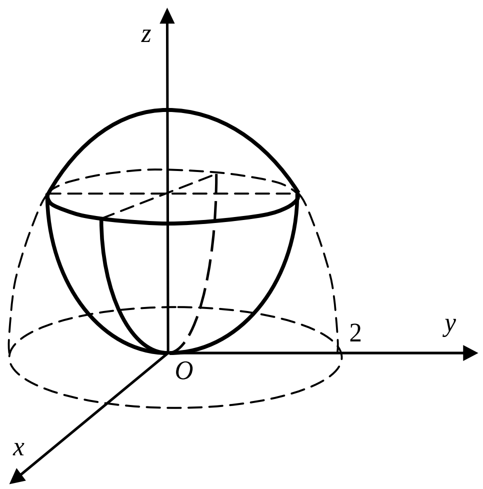

Рис. 2.20

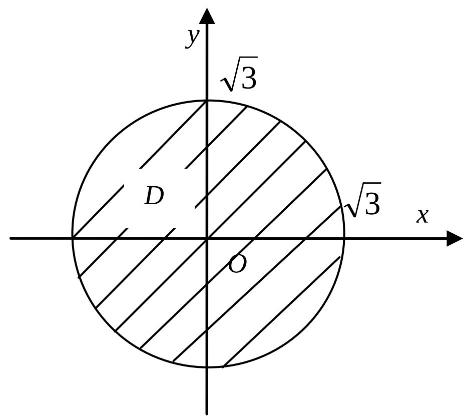

Рис. 2.21

Маємо, що область (D) - це круг радіуса $\sqrt{3}$, центр якого співпадає з початком координат, тобто (D)*:* $x^2+y^2 \le 3z$ (рис.2.21).

Перейдемо у потрійному інтегралі до циліндричних координат. Врахуємо, що у циліндричних координатах рівняння сфери: $\rho^2+z^2=4$ або $z^2=4-\rho^2$; рівняння параболоїда обертання: $\rho^2=3z$ або $z=\dfrac{\rho^2}{3}$; рівняння кола $\rho^2=3$.

Отже, $(G`): 0 \le \rho \le \sqrt{3}, 0 \le \varphi \le 2\pi, \frac{\rho^2}{3} \le z \le \sqrt{4-\rho^2}$. Маємо:

$$\iiint\limits_{(G)} zdxdydz = \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi,\ dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz \\ y = \rho\sin\varphi, \qquad (G) \to (G`) \\ z = z \end{array} \right| = \iiint\limits_{(G`)} z\rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int\limits_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} zdz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho \left(\frac{z^2}{2} \Bigg|_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} \right) d\rho = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho \left(4 - \rho^2 - \frac{\rho^4}{9} \right) d\rho = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(4\rho - \rho^3 - \frac{\rho^5}{9} \right) d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi \left(\frac{4\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{54} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \pi \left(6 - \frac{9}{4} - \frac{27}{54} \right) = \frac{13}{4}\pi.$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{(G)} \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2+R^2}$, де (G) – верхня половина кулі радіуса R із центром у початку координат: $x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0$.

Розв’язання. Перейдемо у потрійному інтегралі до сферичних координат. Врахуємо, що у сферичних координатах рівняння сфери: $r = R$. Проекцією півкулі на площину xOy є круг $x^2+y^2 \le R^2$.

Отже, маємо

$$\iiint\limits_{(G)} \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2+R^2} = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi\sin\theta, dxdydz = r^2\sin\theta drd\varphi d\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, (G) \to (G`) \\ z = r\cos\theta, G`: 0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \iiint\limits_{(G`)} \frac{r^2\sin\theta}{r^2+R^2} drd\varphi d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_0^R \frac{r^2 dr}{r^2+R^2} = \varphi\Big|_0^{2\pi} \left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} \right) \left(\int\limits_0^R \frac{r^2+R^2-R^2}{r^2+R^2} dr \right) = 2\pi \left(\int\limits_0^R dr - R^2 \int\limits_0^R \frac{dr}{r^2+R^2} \right) =$$

$$= 2\pi \left(R - \frac{R^2}{R} arctg \frac{2}{R} \Bigg|_0^R \right) = 2\pi \left(R - R\frac{\pi}{4} \right) = 2\pi R \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

§2.6. Геометричне і фізичне застосування потрійного інтеграла

Розглянемо вираз об'єму довільної кубовної області у вигляді потрійного інтеграла. З Очевидної рівності $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta V_k = V$ (як би ми не розбивали область (V) на частинні області, ми матимемо об'єм всієї області (V)) випливає

$$\lim_{d_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta V_k = V ,$$

тобто об'єм просторового тіла, обмеженого областю (V), обчислюється за формулою

6) $$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz .$$

7) Маса тіла V з густиною $\gamma = \gamma\,(x, y, z)$:

$$M = \iiint\limits_{V} \gamma(x, y, z) dxdydz.$$

8) <u>Моментом інерции</u> відносно деякої вісі L называют інтеграл $I_L = \iiint\limits_{(V)} \rho \cdot l^2 dxdydz$, де l – відстань змінної точки тіла *(x,y,z)* до вісі.

Моменти інерцій відносно координатних осей задаються формулами: $I_x = \iiint\limits_{(V_z)} \rho\left(x^2 + z^2\right) dxdydz$, $I_y = \iiint\limits_{(V)} \rho\left(z^2 + x^2\right) dxdydz$, $I_z = \iiint\limits_{(V)} \rho\left(x^2 + y^2\right) dxdydz$.

Для однорідних тіл ρ=1.

Центробіжні моменти інерції визначаються інтегралами:

$$I_{xy} = \iiint\limits_{(V)} \rho xydxdydz \, , \; I_{yz} = \iiint\limits_{(V)} \rho yzdxdydz \, , \; I_{zx} = \iiint\limits_{(V)} \rho zxdxdydz \, .$$

Приклад. Знайти момент інерції куба з стороною *a* відносно його ребра.

Розв’язання. Вибираємо систему координат, початок якої – точка О помістимо в одну з вершин. Тоді нерівності, що визначають область інтегрування запишемо у вигляді:

(V): $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

Момент інерції куба відносно ребра в такій системі координат можна обчислити, використавши формулу п.6.2, де $l^2 = y^2 + z^2$. В даному випадку ребро куба вибране вздовж вісі OX. Отже:

$$I_L = \iiint\limits_{(V)} l^2 dxdydz = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (y^2 + z^2) dz =$$
$$= \int_0^a dx \int_0^a (y^2 z + \frac{1}{3} z^3) \Big|_0^a dy = \int_0^a dx \int_0^a (ay^2 + \frac{1}{3} a^3) dy = \int_0^a (\frac{1}{3} ay^3 + \frac{1}{3} a^3 y) \Big|_0^a dx = \frac{2}{3} a^4 \int_0^a dx = \frac{2}{3} a^5$$

Приклад розв’язання. Відмітимо також, що і в цій задачі не було необхідності виконувати креслення. Достатньо записати нерівності, які визначають область.

Статистичні моменти тіла відносно координатних площин Oyz, Oxz, Oxy:

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\gamma(x, y, z) dxdydz,$$
$$M_{xz} = \iiint\limits_V y\gamma(x, y, z) dxdydz,$$
$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\gamma(x, y, z) dxdydz.$$

9) Координати центра мас тіла:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x\gamma(x, y, z) dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z) dxdydz} = \frac{M_{yz}}{M},$$

$$y_c = \frac{\iiint\limits_V y\gamma(x, y, z) dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z) dxdydz} = \frac{M_{xz}}{M},$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V z\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dxdydz} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндрами $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$ і площинами $x = -1,\ x = 2$.

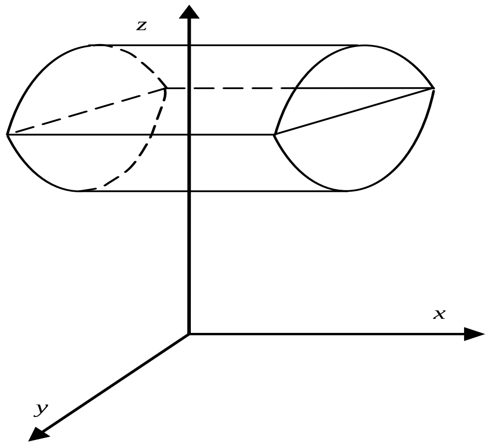

Рис. 2.22

Розв'язання. Поверхні $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$ – це параболічні циліндри з твірними, паралельними вісі Ox, і напрямними параболами $z = 4 - y^2$ і $z = y^2 + 2$ в площині yOz відповідно (рис.2.22). Площини $x = -1,\ x = 2$ паралельні площині yOz і відсікають на вісі Ox відрізки довжиною 1 та 2 відповідно.

Проекцією цього тіла, тобто областю інтегрування, є область (P), обмежена параболами $z = 4 - y^2$ і $z = y^2 + 2$ в площині Oyz.

Тобто, об'єм даного тіла виражається інтегралом:

$$V = \int_{-1}^{2} dx \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2+1}^{4-y^2} dz = \int_{-1}^{2} dx \int_{-1}^{1} \left(2 - 2y^2 dy\right) = 2\int_{-1}^{2} \left(2y - \frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_{-1}^{1} dx = 8 \text{ (куб. од.)}$$

Приклад. Обчислити об'єм фігури, обмеженої поверхнею $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^3 x$.

Розв'язання. Зобразити дану поверхню в прямокутній системі координат дуже важко, так само як і обчислити інтеграл. Тому при обчисленні інтегралу перейдемо до сферичних координат за допомогою формул. Після перетворення рівняння поверхні $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = a^3 x$ прийме вигляд:

$\rho = a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}$. Звідси маємо межі інтегрування по змінній ρ: $0 \le \rho \le a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}$.

Визначимо межі по змінним θ і φ. Для цього покладемо $\rho = 0$, або $a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi} = 0$. Звідси $\sin\theta\cos\varphi = 0$. А це можливо у випадку, коли $\sin\theta = 0$ або $\cos\varphi = 0$ ($\theta = \pi + \pi n,\ n \in Z,\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$). Отже, $0 \le \theta \le \pi$ і $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. Тоді шуканий об'єм дорівнює:

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}} \rho^2 \sin\theta d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \cdot \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}} d\theta =$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\theta\cos\varphi d\theta = \frac{\pi a^3}{3} \text{ (куб. од.)}$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = z$ та $x^2 + 4 = z$.

Розв'язання. Перша поверхня є еліптичним параболоїдом, що проходить через початок координат. Друга поверхня є параболічним циліндром, що піднятий над площиною *XOY* на 4 одиниці. Дані поверхні та тіло, об'єм якого треба знайти, зображені на рис.2.23.

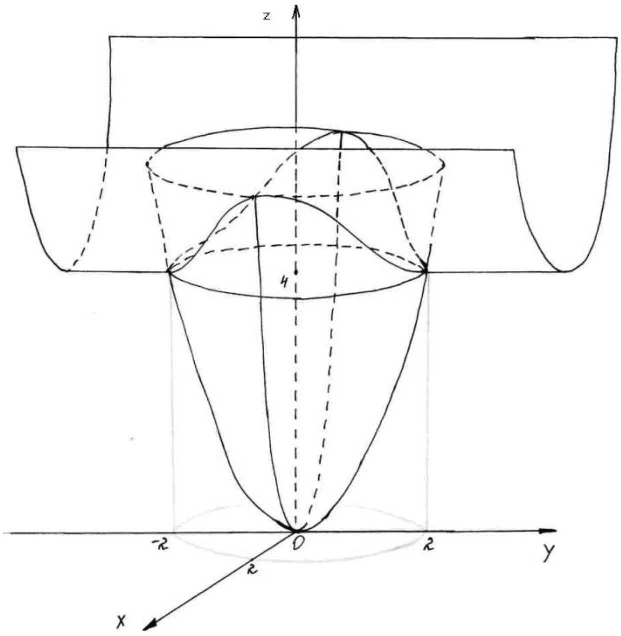

рис.2.23

Тіло є симетричним відносно координатних площин *YOZ* та *XOZ*, оскільки змінні x і y входять тільки у квадратах в обидва рівняння. Ці зауваження дозволяють обчислити об'єм лише частини тіла, що лежить у першому октанті. Тоді об'єм всього тіла виразиться наступним чином:

$$V = 2\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+4} dz = 2\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4-y^2)dy\,.$$

При обчисленні цього інтеграла перейдемо до полярної системи координат. Областю інтегрування у декартових координатах був круг $x^2+y^2 \le 4$, у полярних координатах він перейде у область $E' = \{(\rho,\Theta) : \rho \le 2, 0 \le \Theta < 2\pi\}$. Але враховуючи те, що знаходиться лише четверта частина тіла, то $0 \le \Theta \le \dfrac{\pi}{2}$. Тоді об'єм тіла дорівнює:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^2 \rho(4-\rho^2\sin^2\Theta)d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8-4\sin^2\Theta)d\Theta = 12\pi\,.$$

Отже, шуканий об'єм тіла дорівнює 12π (куб. од.)

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\frac{x^2}{9}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ та $\frac{x^2}{9}+y^2+\frac{(z-2)^2}{4}=1$.

Розв'язання. Дані поверхні є еліпсоїдами, перетином яких є еліпс $\frac{x^2}{9}+y^2=\frac{3}{4}$ у площині $z=1$. Тіло, об'єм якого треба знайти, зображено на рис.2.24.

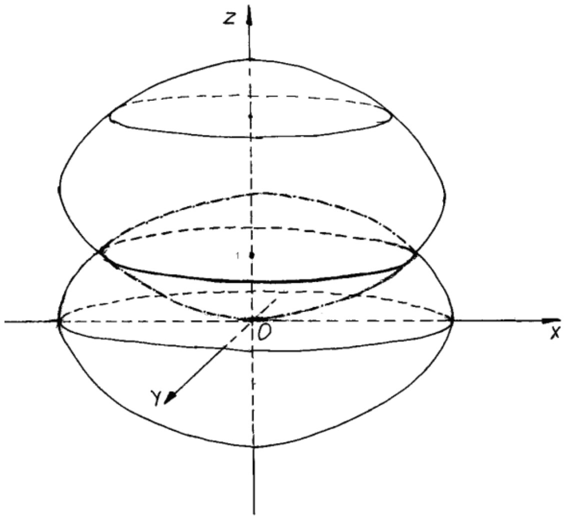

рис.2.24

Знаходимо об'єм:

$$V=\iint\limits_E dxdy\int\limits_{2-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}}dz=\iint\limits_E(4\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-y^2}-2)dxdy\text{, де } E=\left\{(x,y):\frac{x^2}{9}+y^2\le\frac{3}{4}\right\}.$$

При обчисленні цього інтегралу перейдемо до узагальнених полярних координат, за формулами: $x=3\rho\cos\Theta,\ y=\rho\sin\Theta$. Обчислимо Якобіан даного перетворення:

$$I(\rho,\Theta)=\begin{vmatrix}x'_\rho & x'_\Theta\\ y'_\rho & y'_\Theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3\cos\Theta & -3\rho\sin\Theta\\ \sin\Theta & \rho\cos\Theta\end{vmatrix}=3\rho\cos^2\Theta+3\rho\sin^2\Theta=3\rho\,.$$

Область інтегрування в узагальнених полярних координатах матиме вигляд: $E' = \left\{ (\rho, \Theta) : \rho \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0 \le \Theta \le 2\pi \right\}$.

Отже, $V = \iint\limits_{E'} (4\sqrt{1-\rho^2} - 2)3\rho d\rho d\Theta = 3\int\limits_0^{2\pi} d\Theta \int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (4\sqrt{1-\rho^2} - 2)\rho d\rho = \dfrac{5}{2}\pi$.

Шуканий об'єм тіла дорівнює $\dfrac{5}{2}\pi$ (куб. од.).

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \dfrac{x}{a}$, де $a \ge 1$.

Розв'язання. У даному випадку зручно перейти до сферичних координат: $x = r\sin\varphi\cos\Theta,\ y = r\sin\varphi\sin\Theta,\ z = r\cos\varphi$, де $0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \Theta \le 2\pi$. Тіло розташоване симетрично відносно площин *XOZ* і *XOY*, оскільки змінні *y* і *z* входять у рівняння тільки у квадратах. Оскільки ліва частина рівняння завжди більша нуля, то і $x \ge 0$, тобто все тіло лежить над площиною *YOZ*. Тому на кути φ *і* Θ накладаються деякі обмеження: $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le \Theta \le \dfrac{\pi}{2}$. Рівняння поверхні $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \dfrac{x}{a}$ у сферичній системі координат має вигляд: $r = \sqrt[3]{\dfrac{\sin\varphi\cos\Theta}{a}}$, а Якобіан даного перетворення дорівнює $r^2\sin\varphi$. Маємо:

$$V = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin\varphi\cos\Theta}{a}}} r^2 \sin\varphi dr = \frac{4}{3a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos\Theta d\varphi = \frac{\pi}{3a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\Theta d\Theta = \frac{\pi}{3a}.$$

Отже, шуканий об'єм тіла дорівнює $\dfrac{\pi}{3a}$ (куб. од.).

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею

$$((ax)^2+y^2+z^2)^3=\frac{z^2}{(ax)^2+y^2}.$$

Розв'язання. Для знаходження об'єму даного тіла доцільно перейти до узагальнених сферичних координат: $x=\frac{1}{a}r\sin\varphi\cos\Theta,\ y=r\sin\varphi\sin\Theta,\ z=r\cos\varphi$, де $0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\Theta<2\pi$. Поверхня $((ax)^2+y^2+z^2)^3=\frac{z^2}{(ax)^2+y^2}$ матиме вигляд $r\le\sqrt[3]{\cos\varphi}$. Якобіан даного перетворення дорівнює $\frac{1}{a}r^2\sin\varphi$.

Тіло розташоване симетрично відносно координатних площин, оскільки змінні x, y, z входять у рівняння тільки у квадратах. Ці зауваження дозволяють обмежитися обчисленням восьмої частини об'єму тіла, тієї, що лежить у першому октанті. Тоді накладаються деякі обмеження на кути φ *і* Θ $:0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\Theta\le\frac{\pi}{2}$.Отже,

$$V=\frac{8}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\Theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt[3]{\cos\varphi}}r^2\sin\varphi dr=\frac{8}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\Theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=\frac{8}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\Theta=\frac{4\pi}{3a}.$$

Отже, шуканий об'єм тіла дорівнює $\frac{4\pi}{3a}$ (куб. од.).

§2.7. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Обчислити $I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y xyz\ dz$.

Розв'язання.

$$I=\int_0^1 xdx\int_0^x ydy\int_0^y zdz=\int_0^1 xdx\int_0^x y\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^y dy=\frac{1}{2}\int_0^1 xdx\int_0^x y^3dy=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left.\frac{y^4}{4}\right|_0^x=\frac{1}{8}\int_0^1 x^5dx=\frac{1}{48}x^6\Big|_0^1=\frac{1}{48}.$$

2. Обчислити $I=\iiint\limits_D 2y^2ze^{xyz}dxdydz$, если D: x =1; y =1; z =1; x = 0; y = 0; z = 0.

Розв'язання. Областю інтегрування D є одиничний куб, три ребра якого лежать на координатних осях.

$$I = \iiint_D 2y^2 z e^{xyz} dxdydz = 2\int_0^1 y^2 dy \int_0^1 zdz \int_0^1 e^{xyz} dx = 2\int_0^1 y^2 dy \int_0^1 zdz \frac{1}{yz} e^{xyz}\Big|_0^1 =$$

(пропонуємо подумати, чому потрійний інтеграл зручніше представити у вигляді повторного саме в цьому порядку)

$$= 2\int_0^1 ydy \int_0^1 dz\left(e^{yz} - 1\right) = 2\int_0^1 ydy\left(\frac{1}{y}e^{yz} - z\right)\Bigg|_0^1 = 2\int_0^1 y\left(\frac{1}{y}e^{yz} - z\right)\Bigg|_0^1 dy = 2\int_0^1 y\left(\frac{1}{y}e^{y} - 1 - \frac{1}{y} + 0\right)dy =$$

$$= 2\int_0^1 \left(e^y - y - 1\right)dy = 2\left(e^y - \frac{y^2}{2} - y\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(e - \frac{1}{2} - 1 - 1\right) = 2e - 5\,.$$

3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого кульою $x^2+y^2+z^2=4$ і

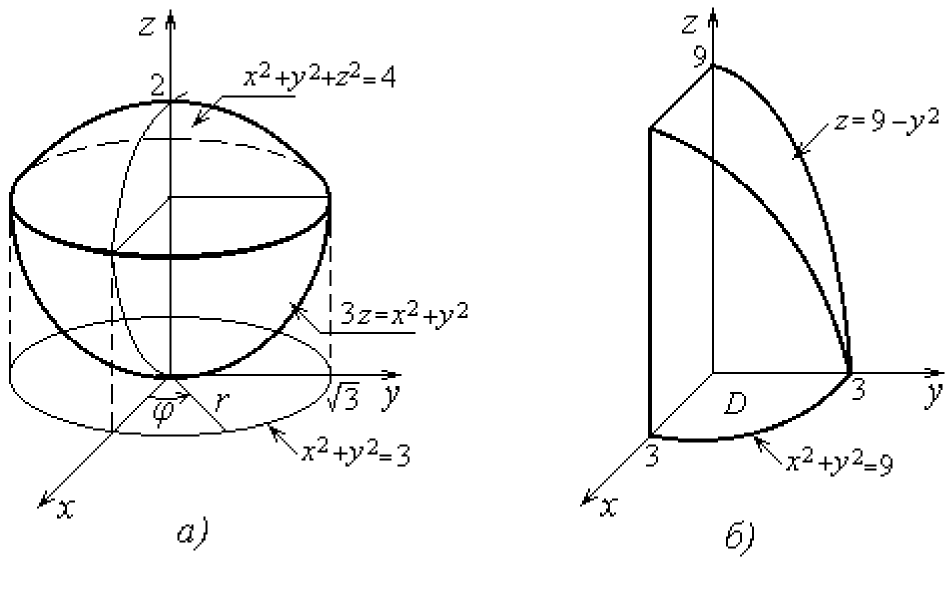

Рис. 2. 25

параболоїдом $3z = x^2+y^2$.

Розв'язання. Нехай Ω – дане в задачі тіло. На рисунку 2.25,*а* зображено тіло Ω_1– частина тіла Ω, що міститься у першому октанті. Очевидно, що

$V(\Omega) = 4V(\Omega_1)$. Знайдемо проекцію лінії перетину кулі і параболоїда на площину xOy. Для цього достатньо з системи рівнянь $z^2=4-(x^2+y^2)$, $z^2=(x^2+y^2)/9$ виключити змінну z. У результаті отримуємо $\left(x^2+y^2\right)^2/9=4-\left(x^2+y^2\right)$, або $\left(x^2+y^2\right)^2+9\left(x^2+y^2\right)-36=0$. Звідки $x^2+y^2=-12$ і $x^2+y^2=3$. Відповідно, рівнянням проекції буде коло $x^2+y^2=3$. Маємо

$$V(\Omega)=V(\Omega_1)=4\iiint\limits_{\Omega_1} dxdydz.$$

Оскільки проекція даного тіла Ω на площину xOy є круг $x^2+y^2 \leq 3$, то доцільно перейти до циліндричних координат. Після перетворень рівняння кола $x^2 + y^2 = 3$, параболоїда $3z = x^2+y^2$ і кулі $x^2+y^2+ z^2=4$, відповідно, приймають вигляд $r=\sqrt{3},\ z=\frac{1}{3}r^2,\ z=\sqrt{4-r^2}$. З рисунка 2.25,*а* видно, що в області інтегрування Ω_1 кут φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$, r – від 0 до $\sqrt{3}$, а z – від $\frac{r^2}{3}$ до $\sqrt{4-r^2}$. Тому

$$V(\Omega)=4\iiint\limits_{\Omega_1} dxdydz = 4\iiint\limits_{\Omega_1} rdrd\varphi dz = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} rdr \int\limits_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} dz = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} r\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{1}{3}r^2\right)dr =$$

$$=4\int\limits_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}r^4\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}} d\varphi = \frac{19}{3}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{19}{6}\pi.$$

4. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 0$, $z = 9-y^2$; $x^2+y^2 = 9$.

Розв’язання. Нехай Ω – дане в задачі тіло. На рисунку 2.25,*б* зображене тіло Ω_1– частина тіла Ω, що знаходиться у першому октанті. Очевидно, дане в задачі тіло симетричне відносно площин xOz, yOz і тому $V(\Omega) = 4V(\Omega_1)$. Маємо $V(\Omega)=4\iiint\limits_{\Omega_1} dxdydz$. Проекція даної частини тіла Ω_1 на площину xOy є частина круга $x^2+y^2 \le 9$, що знаходиться у першій чверті (на рис.2.25,*б* – це чверть круга *D*). Отже,

$$V(\Omega) = 4\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^{9-y^2} dz = 4\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} z\Big|_0^{9-y^2} dy = 4\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \left(9-y^2\right)dy = 4\int_0^3 (9\sqrt{9-x^2} -$$

$$-\frac{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3}{3})dx$$. Зробимо заміну x=3sin$t$, dx=3costdt. Якщо x=0, t=0, якщо x=3, $t=\frac{\pi}{2}$.

$$V(\Omega) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9\sqrt{9-9\sin^2 t} - \frac{(\sqrt{9-9\sin^2 t})^3}{3}\right)3\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(27\cos t - 9\cos^3 t\right)3\cos t dt =$$

$$= 108\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos t - \cos^3 t\right)\cos t dt = 324\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - 108\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = 162\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2t\right)dt -$$

$$-27\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t\right)dt = 162\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 162\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt - 27\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - 54\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt - 27\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2t dt =$$

$$= 162t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{162}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} - 27t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{54}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{27}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 4t\right)dt =$$

$$= 81\pi - \frac{27}{2}\pi - \frac{27}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \frac{27}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t dt = 81\pi - \frac{27}{2}\pi - \frac{27}{2}t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{27}{8}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{243}{4}\pi.$$