Категорія Т

Задача 1

На гіперболі $xy = 1$ взято точки A_n та B_n з абсцисами $\frac{n}{n+1}$ та $\frac{n+1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, відповідно. Позначимо через O_n центр кола, що проходить через точки A_n, B_n і точку $(1; 1)$.

Чи існує гранична точка центрів O_n? Якщо така точка існує, то вкажіть її координати.

Розв'язання

Очевидно, що A_n, B_n симетричні відносно прямої $y = x$, тому всі центри O_n лежать на цій прямій. Якщо $C(1; 1)$, то O_n – це точка перетину прямої $y = x$ і прямої l_n, яка є серединним перпендикуляром відрізка A_nC. Середина A_nC – точка $(P_n;\ Q_n) = \left(\frac{2n+1}{2(n+1)};\ \frac{2n+1}{2n}\right)$.

Рівняння прямої A_nC (як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки) має вигляд:

$$(n+1)x + ny = 2n + 1.$$

Тоді рівняння прямої l_n, а $l_n \perp A_nC$, можна записати таким чином:

$$(x - P_n;\ y - Q_n) = t\left(\frac{1}{n};\ \frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow\ nx - (n+1)y = -\frac{(2n+1)^2}{2n(n+1)},$$

звідки (підставляючи $x = y$) знаходимо

$$O_n = \left(\frac{(2n+1)^2}{2n(n+1)};\ \frac{(2n+1)^2}{2n(n+1)}\right) \Rightarrow\ (2; 2) \text{ – гранична точка.}$$

Відповідь: існує, $(2; 2)$.

Категорія Т

Задача 2

Знайти площу множини точок площини XOY, яка задовольняє наступним умовам:

1) $0 < y < 5$;
2) відстань від осі OX більша відстані до відрізка AB, де $\left(A(0;1); B(0;2)\right)$.

Розв'язання

При $0 < y < 1$ точки шуканої області лежать вище параболи $y = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}$. При $1 < y < 2$ – між прямими $y = -x$ та $y = x$. При $2 < y < 5$ – вище параболи $y = 1 + \frac{x^2}{4}$.

Проінтегрувавши, отримаємо:

$$S = 2S_1 = 67/3.$$

Відповідь: $67/3$.

Категорія Т

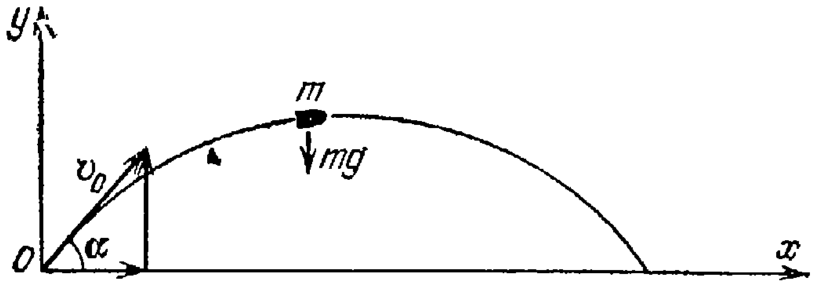
Задача 3

Нехай тіло кинуто під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Вивести рівняння руху тіла, нехтуючи силами опору і знайти:

1) час польоту тіла до його падіння;
2) відстань польоту по горизонталі;
3) максимальну висоту підйому тіла, що летить.

Розв'язання

Виберемо осі координат так, як показано на рисунку.



У довільному положенні M на тіло масою m діє лише одна сила – його вага $P = mg$. Тому відповідно до другого закону Ньютона диференціальні рівняння руху в проекціях на осі x і y запишуться у вигляді

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg.$$

Скорочуємо на m, отримуємо рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g. \qquad (*)$$

Початкові ж умови руху тіла такі:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = v_0\sin\alpha \qquad \text{при} \quad t = 0. \qquad (**)$$

Проінтегрувавши рівняння (*) з урахуванням початкових умов (**), приходимо до висновку, що рівняння руху тіла задаються формулами

$$x = (v_0\cos\alpha)t, \quad y = (v_0\sin\alpha)t - g\,t^2/2. \qquad (***)$$

З рівняння (***) можна зробити ряд висновків про характер руху кинутого тіла. Наприклад, можна відповісти на питання: який час польоту тіла до його падіння на землю, яка відстань польоту по горизонталі, яка максимальна висота тіла, що летить.

На перше питання можна відповісти, знайшовши значення t, при якому $y = 0$. З другого рівняння (***) видно, що це буде тоді, коли

$$t\left[v_0\sin\alpha - \frac{gt}{2}\right] = 0,$$

тобто коли або $t = 0$, або $t = (2v_0\sin\alpha)/g$. Друге значення і дає відповідь на перше питання.

Щоб відповісти на друге питання, обчислимо значення x при значенні t, рівному часу польоту. З першого рівняння (***) отримуємо, що відстань польоту по горизонталі задається формулою

$$\frac{(v_0 \cos\alpha)(2v_0 \sin\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

З останньої рівності, зокрема, випливає, що відстань буде найбільшою, коли $2\alpha = 90°$, тобто $\alpha = 45°$. У цьому випадку відстань дорівнюватиме v_0^2/g.

Відповідь на третє питання ми відразу ж отримаємо, якщо зазначимо умову максимуму y. Але це означає, що в тій точці, де y максимальне, похідна $\frac{dy}{dt} = 0$. Враховуючи ж, що,

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha,$$

приходимо до рівності $-gt + v_0 \sin\alpha = 0$, звідки

$$t = (v_0 \sin\alpha)/y.$$

Підставляючи тепер отримане значення t у друге рівняння (***), знаходимо, що максимальна висота дорівнює $v_0^2 \sin^2\alpha/(2g)$.

Задача 4

Обчислити визначник n-го порядку матриці $A = [a_{ij}]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & i \neq j, \\ 2, & i = j. \end{cases}$$

Розв'язання

Додамо другий рядок до першого, третій рядок до другого, …, n-й рядок до $(n-1)$-го, отримаємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & +1 & \ldots & \pm 1 & \mp 1 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & \mp 1 & \pm 1 \\ +1 & -1 & 2 & \ldots & \pm 1 & \mp 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \ldots & 2 & -1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Тепер віднімемо перший стовпчик від другого. Потім віднімемо отриманий другий стовпчик від третього, …, і нарешті, $(n-1)$-й стовпчик від n-го. У результаті отримаємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n+1 \end{vmatrix} = n+1.$$

Категорія Т

Задача 5

Знайти остачу від ділення многочлена

$$4x^{2019} + 5x^{2018} + 6x^{2017} + 3x^{2016} + 12x + 3$$

на многочлен $x^2 + 1$.

Розв'язання

За означенням ділення многочленів маємо тотожність

$$4x^{2019} + 5x^{2018} + 6x^{2017} + 3x^{2016} + 12x + 3 = Q(x)(x^2 + 1) + ax + b,$$

яка має місце в області комплексних чисел. У цій тотожності $Q(x)$ – деякий многочлен, а коефіцієнти a і b необхідно знайти. Для цього у тотожність у якості x потрібно підставити один із коренів виразу $x^2 + 1$, наприклад $x = i$:

$$4i^{2019} + 5i^{2018} + 6i^{2017} + 3i^{2016} + 12i + 3 = ai + b,$$

$$4i^{2016} \cdot i^3 + 5i^{2016} \cdot i^2 + 6i^{2016} \cdot i + 3i^{2016} \cdot 1 + 12i + 3 = ai + b,$$

$$-4i - 5 + 6i + 3 + 12i + 3 = ai + b,$$

$$14i + 1 = ai + b.$$

Звідки маємо $a = 14$, $b = 1$. Отже, остача буде $14x + 1$.

Задача 6

Матриці A і B мають розмірність $[4 \times 2]$ і $[2 \times 4]$ відповідно, такі, що

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти BA.

Розв'язання

Представивши A і B у вигляді блочних матриць $A = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)$ і $B = (B_1|B_2)$, маємо

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A_1B_1 = A_2B_2 = E, \qquad A_1 = {B_1}^{-1}, A_2 = {B_2}^{-1},$$
$$A_2B_1 = A_1B_2 = -E, \qquad A_2 = -{B_1}^{-1}, A_1 = {B_2}^{-1}.$$
$$BA = (B_1|B_2)\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = B_1A_1 + B_2A_2 = E + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Категорія Т

Задача 7

Знайти загальний розв’язок рівняння $[\vec{a},\ \vec{x}] = \vec{b}$, де $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Розв’язання

Скалярне множення вектора $\vec{x}$ цього рівняння на даний вектор $\vec{a}$ дасть деякий скаляр:

$$(\vec{x}, \vec{a}) = \lambda.$$

Тоді помноживши початкове рівняння на вектор $\vec{a}$ векторно, отримаємо

$$[\vec{a}, [\vec{a}, \vec{x}]\,] = [\vec{a}, \vec{b}],$$

$$\vec{a}, (\vec{a}, \vec{x}) - \vec{x}(\vec{a}, \vec{a}) = [\vec{a}, \vec{b}],$$

$$\lambda\vec{a} - x\vec{a}^2 = [\vec{a}, \vec{b}],$$

$$\vec{x} = \frac{\lambda\vec{a}}{\vec{a}^2} - \frac{[\vec{a}, \vec{b}]}{\vec{a}^2}.$$

Ввівши позначення $\frac{\lambda}{\vec{a}^2} = \Lambda$, маємо

$$\vec{x} = \Lambda\vec{a} - \frac{[\vec{a}, \vec{b}]}{\vec{a}^2}. \qquad (*)$$

(тут Λ відіграє роль довільної сталої). Підстановкою можна перевірити, що формула (*) дає загальний розв’язок початкового рівняння.