Геометричні задачі в завданнях ЗНО

Захарченко Н.М.

Аналіз завдань з геометрії в тестах ЗНО 2016-2017 років

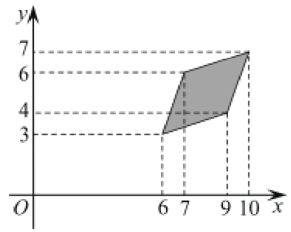
	Кількість геометричних завдань	З них планіметрія	З них стереометрія	Максимальна кількість балів
2016 основна сесія	11	5	6	22
2016 пробне тестування	11	6	5	22
2016 додаткова сесія	10	5	5	21
2017 основна сесія	11	6	5	22
2017 пробне тестування	11	7	4	22
2017 додаткова сесія	11	6	5	22

Специфіка геометричних завдань ЗНО останніх років

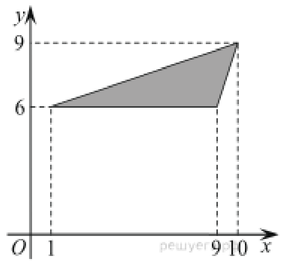
1. Координатна площина (решітка). Знаходження кутів і площ .
2. Вектори на площині (завдання 2015-17 років).
3. Використання дотику кіл, довжини дуги, площі сектора, сегмента, кільця.
4. Практичні завдання з геометричним змістом.
5. Координатний простір (симетрія відносно осі та площини).
6. Теоретичні питання стереометрії 10 класу (паралельність та перпендикулярність прямих та площин, ттп, властивості паралельності та перпендикулярності площин.
7. Побудова перерізів многогранників.
8. Критерії оцінювання завдання №32 та правила його оформлення.

Використання координатної площини (решітка)

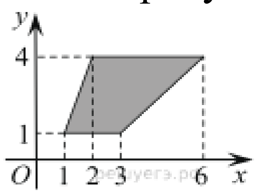
Задача 1. Знайти площу ромба, вершини якого мають координати *(6; 3), (7; 6), (9; 4), (10; 7)*.



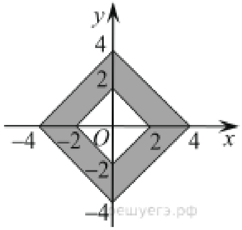
Задача 2. Знайти площу трикутника, вершини якого мають координати *(1; 6), (9; 6), (10; 9)*.



Задача 3. Знайти площу трапеції, зображеної на рисунку.

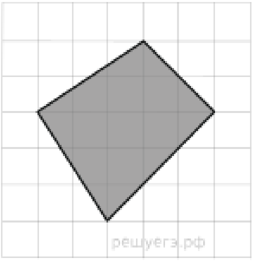


Задача 4. Знайти площу заштрихованої фігури.

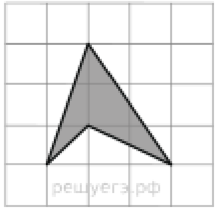


Використання координатної площини (решітка)

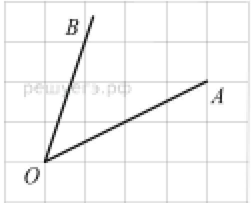
<u>Задача 5.</u> Знайти площу чотирикутника зображеного на папері в клітинку з розміром клітинки *1см* х *1см*. Відповідь дайте в квадратних сантиметрах.



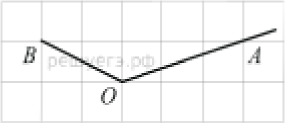
<u>Задача 6.</u> Знайти площу чотирикутника зображеного на папері в клітинку з розміром клітинки *1см* х *1см*. Відповідь дайте в квадратних сантиметрах.



<u>Задача 7.</u> На папері в клітинку розміром *1см* х *1см* зображено кут. Знайти тангенс цього кута.



<u>Задача 8.</u> На папері в клітинку розміром *1см* х *1см* зображено кут. Знайти тангенс кута *AOB*.



Вектори на площині

1. *2016 основна сесія*

   У прямокутній системі координат на площині задано паралелограм *ABCD*, *cos A = 0,44*. Визначте довжину діагоналі *BD* паралелограма, якщо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ (6; -8) і $\overrightarrow{AD}$ дорівнює 88.

2. *2016 додаткова сесія*

   У прямокутній системі координат на площині задано трапецію *ABCD*, основа якої *AD* вдвічі більша за основу *BC*. Обчисліть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{BD}$ та $\overrightarrow{AC}$, якщо $\overrightarrow{AB}$ (2; 9) і $\overrightarrow{BC}$ (-4; 3).

3. *2017 основна сесія*

   У прямокутній системі координат на площині задано взаємно перпендикулярні вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\vec{a}(4;\ 3)$. Визначте абсцису точки *B*, якщо *A* (-2; 0), а точка *B* лежить на прямій $y = 2x$.

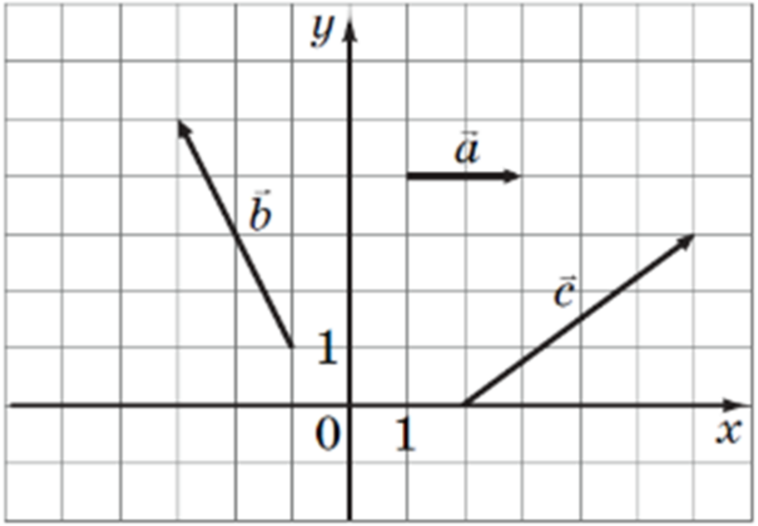
Вектори на площині

4. 2017 додаткова сесія

У прямокутній системі координат на площині задано вектори $\vec{a}$(-1; 1) та $\vec{b}$(-1; 2). Визначте значення m, за якого вектори $\vec{a}+m\vec{b}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні.

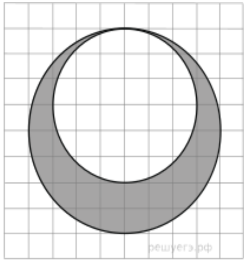
5. 2017 пробне

У прямокутній системі координат на площині зображено вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Визначте косинус кута між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{c}$.

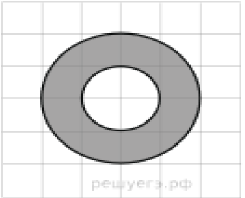


Використання дотику кіл, довжини дуги, площі сектора, сегмента, кільця

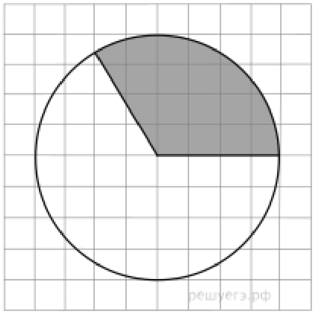
Задача 1. На папері в клітинку зображено два круги. Площа внутрішнього круга дорівнює 9. Знайти площу заштрихованої фігури.



Задача 2. На папері в клітинку зображено два круги. Площа внутрішнього круга дорівнює 9. Знайти площу заштрихованої фігури.

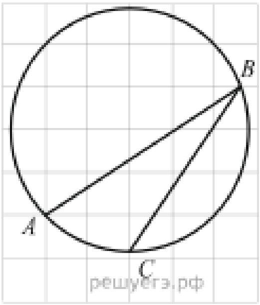


Задача 3. На папері в клітинку зображено круг. Яка площа круга, якщо площа заштрихованого сектора дорівнює 23?



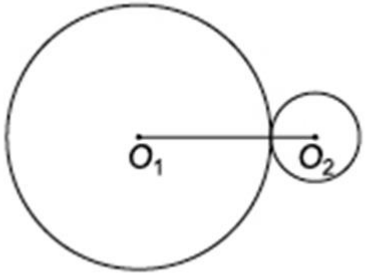
Використання дотику кіл, довжини дуги, площі сектора, сегмента, кільця

<u>Задача 4.</u> Знайти градусну міру дуги АС зображеного кола, на яку спирається кут АВС.



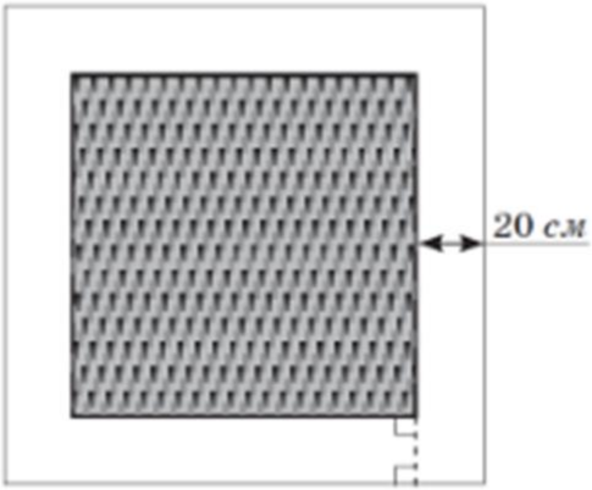
<u>Задача 5 (*додаткова сесія 2015*).</u> Кола з центрами в точках O_1 та O_2 дотикаються зовні (див. рисунок). Радіус більшого кола в 3 рази перевищує радіус меншого кола. Обчисліть довжину відрізка O_1O_2, якщо довжина меншого кола дорівнює 10π *см*. Уважайте, що кола лежать в одній площині.

А	Б	В	Г	Д
10 *см*	24 *см*	30 *см*	15 *см*	20 *см*



ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З ГЕОМЕТРИЧНИМ ЗМІСТОМ

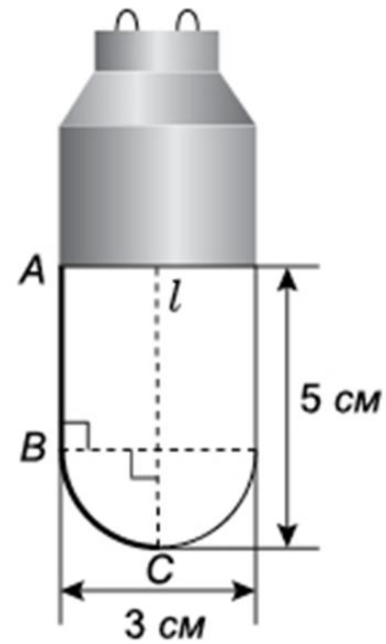
Задача 1 (_№ 14 2017 додаткова сесія_). Підлога кімнати має форму квадрата. На ній лежить квадратний килим, кожна сторона якого віддалена від найближчої стіни кімнати на 20 *см* (див. рисунок). Визначте периметр килима, якщо периметр підлоги дорівнює 18 *м*. Наявністю плінтусів на підлозі знехтуйте.



А	Б	В	Г	Д
10 *м*	13,6 *м*	15,8 *м*	16,4 *м*	17,2 *м*

Практичні заняття з геометричним змістом

<u>Задача 2</u> (*<u>№20 2015 додаткова сесія</u>*). На рисунку зображено осьовий переріз світлодіодної лампи. Активна поверхня цієї лампи, через яку відбувається випромінювання світла, є тілом обертання, утвореним обертанням відрізка AB та чверті кола BC навколо осі l. Використовуючи зазначені на рисунку дані, обчисліть площу активної поверхні світлодіодної лампи. Виберіть відповідь, найближчу до точної.



А	Б	В	Г	Д
39 $см^2$	42 $см^2$	45 $см^2$	48 $см^2$	51 $см^2$

Теоретичні питання стереометрії 10 класу

***Задача 1** (№ 12 додаткова сесія 2017)*. Площина α і β паралельні. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Існує пряма, що лежить і в площині α, і в площині β.

II. Якщо пряма перпендикулярна до площини α, то вона перпендикулярна до площини β.

III. Якщо пряма лежить у площині α, то вона паралельна будь-якій прямій у площині β.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише I та II	лише II	лише II та III	лише III

Теоретичні питання стереометрії 10 класу

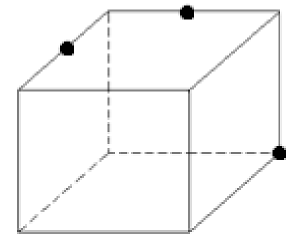
Задача 2 (*№ 4 додаткова сесія 2015*)**.** У просторі задано пряму α і точку *M*, яка не лежить на цій прямій. Скільки всього прямих, що перетинають пряму α, можна провести перпендикулярно до неї через точку *M*?

А	Б	В	Г	Д
жодної	одну	дві	три	безліч

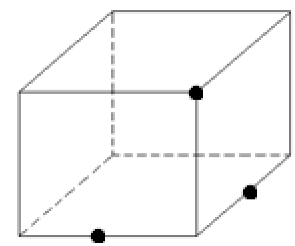
Задача 1 (*№ 24 тренувальне тестування СумДУ 2016*)

На рисунках (1-4) зображено куб і три точки, що розміщені у вершинах куба або є серединами його ребер. Установіть відповідність між кожним рисунком (1-4) та назвою фігури (А-Д), яка є перерізом куба площиною, що проходить через три задані точки.

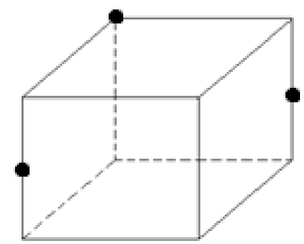
1.



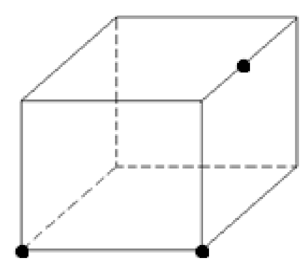
2.



3.



4.



А. трикутник

Б. прямокутник

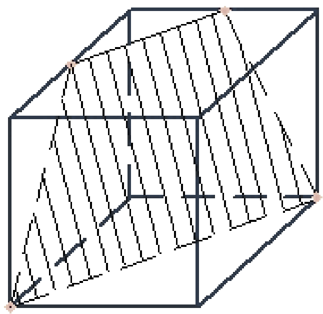
В. трапеція

Г. п’ятикутник

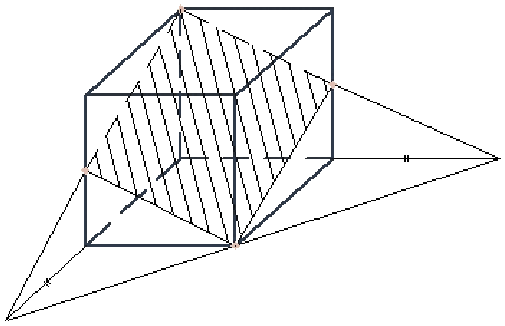
Д. ромб

Розв’язання

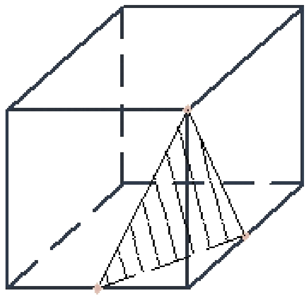
1. Відповідь:



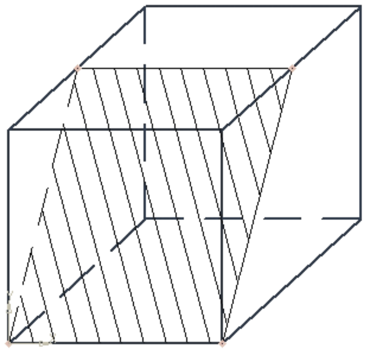
3. Відповідь:



2. Відповідь:



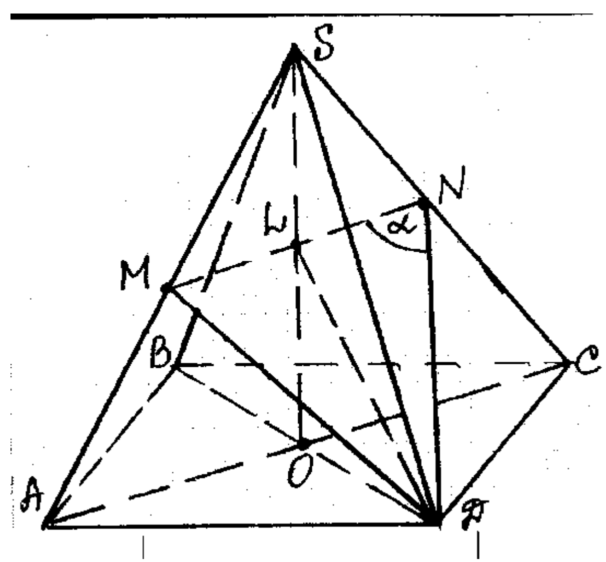
4. Відповідь:



Розв'язування та оцінювання завдання № 32

№ 32. (*тренувальне тестування СумДУ 2016*).

У правильній чотирикутній піраміді *SABCD* (*S* – вершина) бічне ребро вдвічі більше сторони основи. Знайдіть кут між медіаною трикутника *SDC*, проведеною з вершини *D*, та середньою лінією трикутника *ASC*, що паралельна основі піраміди.



Розв'язання

Нехай *SABCD* – задана правильна піраміда, в основі якої лежить квадрат *ABCD*, і *SO* її висота. Позначимо сторону основи *AB* через a, тоді бічне ребро $SA = 2a$.

У трикутнику *SDC* з вершини *D* проведемо медіану *DN*, *N* – середина ребра *SC*.

У трикутнику *ASC* проведемо середню лінію, паралельну *AC*. Вона перетинає ребра *SA* та *SC* у точках *M* та *N* відповідно, $AM = MS$ та $SN = NC$ (за означенням середньої лінії). Оскільки *AC* лежить у площині *ABC* і $MN \parallel AC$, то $MN \parallel (ABC)$.

Прямі *MN* та *ND* перетинаються в точці *N*, тому кут *MND* є шуканим кутом між медіаною *DN* трикутника *SDC* і середньою лінією *MN* трикутника *ASC*. Позначимо $\angle MND = \alpha$.

Діагональ *AC* квадрата *ABCD* дорівнює $a\sqrt{2}$, тому середня лінія $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Висота *SO* піраміди перетинає *MN* в точці *L*. Оскільки трикутники *ASC* і *SMN* є рівнобедреними, то $AO = OC$ і $ML = LN = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

З прямокутного трикутника SOC: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{2a^2}{4}} = a\sqrt{\frac{7}{2}}$.

За теоремою Фалеса $SL = LO = \frac{1}{2}SO = a\sqrt{\frac{7}{8}}$.

З прямокутного трикутника LOD: $LD = \sqrt{OD^2 + LO^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{7a^2}{8}} = a\sqrt{\frac{11}{8}}$.

Трикутник *DNM* рівнобедрений, оскільки $DM = DN$ як медіани рівних трикутників *SAD* та *SCD*. Медіана *DL* є висотою. Отже, трикутник *DLN* є прямокутним.

З трикутника *DLN* маємо:

$tg\ \alpha = \frac{LD}{LN} = \sqrt{11}$,

$\alpha = arctg\sqrt{11}$.

Відповідь: $\alpha = arctg\sqrt{11}$.

Схема оцінювання завдання №32

1. За правильно побудований рисунок до задачі з обґрунтуванням паралельності відповідної середньої лінії до основи учень одержує **1 бал**.
2. За обґрунтування рівності двох сторін трикутника *MND (DM=DN)* учень одержує ще **1 бал**.
3. Якщо учень правильно знайшов елементи трикутника *DLN*, необхідні для знаходження кута , він одержує ще **1 бал**.
4. За правильну відповідь учень одержує ще **1 бал**.

Таким чином, за правильно розв'язану задачу учень одержує **4 бали**.

Якщо учень не з'єднує точки *M* і *Д* на рисунку, а розглядає кут α як кут трикутника *DLN*, то в цьому випадку треба обґрунтувати, що трикутник *DLN* – прямокутний. Тоді має місце така **схема оцінювання** :

1. За правильно побудований рисунок до задачі з обґрунтуванням паралельності відповідної середньої лінії до основи учень одержує **1 бал**.
2. За обґрунтування того, що $LD \perp MN$ учень одержує ще **1 бал**.
3. Якщо учень правильно знайшов елементи трикутника *DLN*, необхідні для знаходження кута α, він одержує ще **1 бал**.
4. За правильну відповідь учень одержує ще **1 бал**.

Таким чином, за правильно розв'язану задачу учень одержує **4 бали**.

Якщо учень для розв'язування задачі використав векторно-координатний метод, то тоді має місце така **схема оцінювання**:

1. За правильне обґрунтування висоти *SO* учень одержує **1 бал**.
2. За вибір системи координат з поясненням необхідних точок учень одержує ще **1 бал**.
3. За обчислення координат цих точок учень одержує ще **1 бал**.
4. За правильну відповідь учень одержує ще **1 бал**.

Таким чином, за правильно розв'язану задачу учень одержує **4 бали**.

Завдання 32 (основна сесія 2017)

Основою правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівносторонній трикутник ABC. Точка, K – середина ребра BC. Площина, що проходить через точки A, K та B_1, утворює з площиною основи призми кут α. Визначте об'єм призми $ABCA_1B_1C_1$, якщо відстань від вершини A до грані BB_1C_1C дорівнює d.

Схема оцінювання

1. Якщо учасник правильно виконав рисунок, позначивши на ньому переріз, і зазначив, що AK – відстань від A до грані BB_1C_1C, $AK = d$, то він отримує **1 бал.**
2. Якщо учасник правильно вказав і обґрунтував кут між площиною перерізу і площиною основи (за теоремою про три перпендикуляри або довівши, що $AK\perp(BB_1C_1C)$, то він отримує ще **1 бал.**
3. Якщо учасник визначив висоту (або площу основи) призми, то він отримує ще **1 бал.**
4. Якщо учасник правильно визначив об'єм призми, то він отримує ще **1 бал.**

Завдання 32 (додаткова сесія 2017)

Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є прямокутник $ABCD$, у якому діагональ $AC = a$, $\angle BAC = \beta$. Площина, що проходить через вершину верхньої основи та діагональ нижньої основи призми, утворює з площиною основи гострий кут α. Визначте об’єм заданої призми.

Схема оцінювання

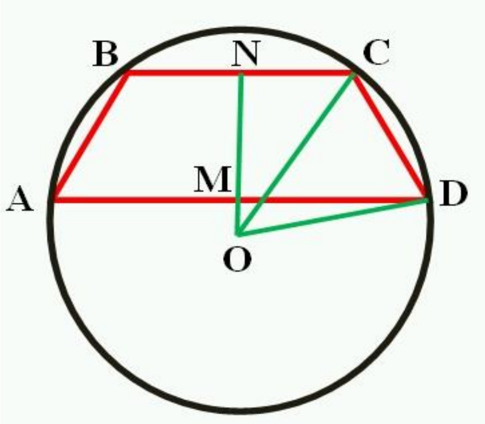
1. Якщо учасник правильно виконав рисунок, позначивши на ньому переріз, то він отримує **1 бал.**
2. Якщо учасник правильно вказав й обґрунтував кут між площиною перерізу й площиною основи, то він отримує ще **1 бал.**
3. Якщо учасник визначив висоту (або площу основи) призми, то він отримує ще **1 бал.**
4. Якщо учасник правильно визначив об’єм призми, то він отримує ще **1 бал.**

Методи розв'язування геометричних задач

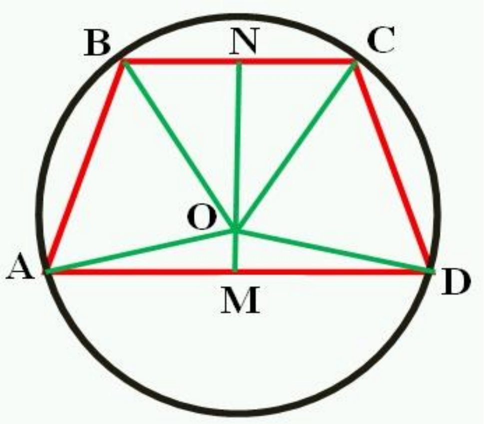
- Метод ключових (опорних) задач
- Метод введення допоміжних змінних
- Метод площ
- Багатоваріантні задачі
- Метод координат

Багатоваріантна задача

<u>Завдання 30.</u> Трапеція з основами 14 і 40 вписана в коло радіусом 25. Знайдіть висоту трапеції. (Якщо задача має один розв'язок, то запишіть його у відповідь. Якщо задача має декілька розв'язків, то у відповідь запишіть їх суму).



а)



б)

Вписана в коло трапеція – рівнобічна. Центр описаного кола може знаходитись:

а) за межами трапеції;

б) всередині трапеції;

в) на середині більшої основи трапеції.

Випадок в) не задовольняє умову задачі, бо діаметр кола не дорівнює більшій основі трапеції.

Розглянемо можливі випадки:

а) у трикутнику ONC ($\angle N = 90°$): $ON^2 = OC^2 - NC^2$;

$ON = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$;

у трикутнику OMD:($\angle M = 90°$): $OM^2 = OD^2 - MD^2$;

$OM = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$;

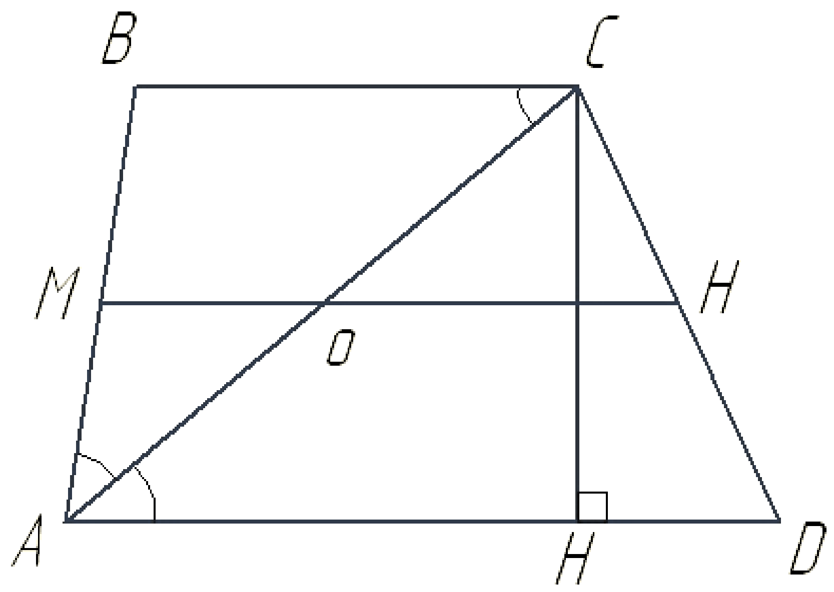
б) довжини відрізків *OM* і *ON* знаходимо аналогічно, але $MN = ON + OM$, $MN = 24 + 15 = 39$.

Отже, сума розв’язків дорівнює $15 + 39 = 48$.

Відповідь: 48.

Метод опорних задач

30. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки довжиною 13 *см* і 23 *см*. Обчисліть (*у см*^{2}) площу трапеції.



Дано рівнобічну трапецію $ABCD$ ($AB = CD$), діагональ AC є бісектрисою $\angle BAD$ і перетинає середню лінію MN в точці O, тобто $AC \cap MN = O$, $MO = 13$, $NO = 23$. $\angle BAC = \angle CAD$ за умовою, $\angle CAO = \angle ACB$ - як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січною AC, тому $\angle BAC = \angle BCA$.

ΔABC рівнобедрений ($BC = BA$) за ознакою, бо має два рівних кути $\angle BAC = \angle BCA$. MO – середня лінія ΔABC, тому $BC = 2 \cdot 13 = 26$.

В ΔACD NO середня лінія, тому $AD = 2 \cdot 23 = 46$.

Побудуємо $CH \perp AD$ і розглянемо ΔCHN : $CD = 26$, $DH = \frac{46-26}{2} = 10$.

За теоремою Піфагора $CH = \sqrt{CD^2 - HD^2}$,

$CH = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{16 \cdot 36} = 4 \cdot 6 = 24$.

Площу трапеції обчислюємо за формулою $S = \frac{AD+BC}{2} \cdot CH$,

$S = \frac{26+46}{2} \cdot 24 = 864$, $S = 864$ см^2.

Відповідь: 864 см^2.

Метод площ

- У трикутнику зі сторонами 9 *см*, 10 *см* і 17 *см* коло дотикається двох менших сторін, а його центр лежить на більшій стороні. Знайдіть радіус кола.
- У рівнобедрений трикутник зі сторонами 13, 13 і 10 см вписали півколо так, що воно дотикається основи і однієї бічної сторони, а центр лежить на іншій бічній стороні. Знайти його радіус.
- 4. Центр кола, що дотикається катетів прямокутного трикутника, лежить на його гіпотенузі. Знайти радіус кола, якщо довжини катетів дорівнюють 6 і 8 см.

Метод введення допоміжних змінних

1. Ширина кільця між двома концентричними колами дорівнює 9 *см*. До меншого кола проведена дотична, яка перетинає більше коло в точках A і B. Знайти радіус меншого кола, якщо довжина хорди AB дорівнює 30 *см*.
2. У рівнобедреному трикутнику висота дорівнює 32 *см*, а довжина вписаного кола дорівнює 24 *см*. Обчисліть периметр трикутника.
3. Різниця між двома катетами дорівнює 31 *см*, а між гіпотенузою і меншим катетом дорівнює 32 *см*. Знайти довжину гіпотенузи.

Бажаю успіхів у подальшому вивченні та навчанні геометрії