

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

3912 ЗБІРНИК ЗАДАЧ
із математики

“Математична олімпіада – 2014”

(за матеріалами другого етапу олімпіади з математики
серед студентів вищих технічних навчальних закладів України)

Суми
Сумський державний університет
2015

Збірник задач із математики “Математична олімпіада – 2014” (за матеріалами другого етапу олімпіади з математики серед студентів вищих технічних навчальних закладів України) / укладачі: В. В. Ніколенко, В. О. Ячменьов. – Суми : Сумський державний університет, 2015. – 39 с.

Кафедра математичного аналізу і методів оптимізації

Передмова

У вересні 2014 року в СумДУ на базі кафедри математичного аналізу і методів оптимізації відбувся другий етап олімпіади серед студентів технічних вищих навчальних закладів України з навчальної дисципліни «Математика».

У ній взяли участь 50 студентів різних курсів 21 вищого навчального закладу. Численні делегації представили інститути та університети з високим рівнем математичної підготовки: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Харківський національний університет радіоелектроніки, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харківський національний автомобільно-дорожній університет, Житомирський державний технологічний університет, Запорізький національний технічний університет, Полтавська державна аграрна академія та ін.

Переможцями олімпіади в офіційному заліку стали:

Категорія М: перше місце – Матвіїв Катерина Юріївна, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»; друге місце – Михайловський Володимир Віталійович, Національний технічний університет

України «Київський політехнічний інститут»; третє – Усатенко Нікіта Дмитрович, Харківський національний університет радіоелектроніки.

Категорія Т: перше місце – Микитянський Максим Анатолійович, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; друге місце – Софронів Геннадій Олександрович, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; третє – Терновський Сергій Анатолійович, Сумський державний університет.

Категорія С: друге місце – Воленко Валерія Григорівна, Національний університет державної податкової служби України; третє – Ковальчук Володимир Вікторович, Національний університет державної податкової служби України.

Журі другого етапу Всеукраїнської олімпіади з математики серед студентів технічних вищих навчальних закладів вирішило видати збірник задач, що вміщує задачі олімпіади з їх розв'язками.

Цей збірник буде корисним у роботі математичних гуртків, для школярів і студентів, які цікавляться математикою.

II етап Всеукраїнської
студентської олімпіади з математики
(Суми, вересень 2014 р.)

Категорія М

1. Нехай $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – тричі диференційована функція. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'''(x) = 0$. Довести, що $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ і $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x)$ існують і дорівнюють нулю.
2. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

3. Розв'язати рівняння $X^n = E$ ($n = 2, 3, \dots$), де X – кососиметрична матриця другого порядку, а E – одинична матриця:

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – корені рівняння

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 = 0.$$

Знайти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1-x_k}.$$

5. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\int_0^{\frac{dy}{dx}} \frac{\cos t \, dt}{16 + 9 \sin^2 t} = \frac{1}{12} \arctg x.$$

6. Довести, що для двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується нерівність

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^3 \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 |\vec{a} - \vec{b}|^2.$$

7. Рівносторонні трикутники зі сторонами $1, 3, 5, \dots$ розміщені в один ряд так, що їх основи знаходяться на одній прямій і впритул примикають одна до одної. Довести, що вершини трикутників, які протилежні основам, розміщені на параболі та віддалені на цілочислову відстань від її фокуса.

Розв'язування

1. Нехай $f: (0, \infty) \rightarrow R$ – тричі диференційована функція. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \in R$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'''(x) = 0$. Довести, що $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ і $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x)$ існують і дорівнюють нулю.

Розв'язання:

Для довільної точки $x > 1$ знайдуться $\theta_1(x)$ і $\theta_2(x) \in (0, 1)$, для яких виконуються рівності

$$\begin{cases} f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(x + \theta_1(x)), \\ f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(x + \theta_2(x)). \end{cases}$$

Додаючи ці рівності і віднімаючи одне від іншого, отримаємо:

$$\begin{cases} f(x+1) + f(x-1) = 2f(x) + f''(x) + \frac{1}{6}(f'''(x + \theta_1(x)) - f'''(x + \theta_2(x))), \\ f(x+1) - f(x-1) = 2f'(x) + \frac{1}{6}(f'''(x + \theta_1(x)) + f'''(x + \theta_2(x))), \end{cases}$$

$$f''(x) = (f(x+1) + f(x-1)) - 2f(x) + \frac{1}{6}(f_1''' - f_2'''),$$

$$2f'(x) = (f(x+1) - f(x-1)) + \frac{1}{6}(f_1''' + f_2''').$$

2. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

Розв'язання:

Маємо ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

Оцінимо загальний член даного ряду

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n > \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e} \neq 0.$$

Ряд розбіжний.

3. Розв'язати рівняння $X^n = E$ ($n = 2, 3, \dots$), де X – кососиметрична матриця другого порядку, а E – одинична матриця:

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1 = |E| = |X|^n = (x^2 + y^2)^n \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Це означає, що $\exists$ таке φ , коли $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$.

Тоді

$$X = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad X^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді } \cos n\varphi = 1, \quad \sin n\varphi = 0 \quad \text{або} \quad \varphi = \frac{2\pi k}{n},$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

4. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – корені рівняння

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 = 0.$$

Знайти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1-x_k}.$$

Розв'язання:

$$\text{Потрібно знайти} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1-x_k}.$$

Нехай

$$P(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

тоді

$$P'(x) = (x - x_2) \dots (x - x_1) + (x - x_1)(x - x_3) \dots \\ \dots (x - x_n) + \dots + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}),$$

або

$$P'(x) = P(x) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_k}.$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_k} = \frac{P'(x)}{P(x)}$$

і

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - x_k} = \frac{P'(1)}{P(1)}.$$

Враховуючи, що $P'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + 1$,

маємо

$$\frac{P'(1)}{P(1)} = \frac{n + (n-1) + \dots + 1}{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n}{2}.$$

Таким чином, шукана границя дорівнює $1/2$.

5. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\int_0^{\frac{dy}{dx}} \frac{\cos t \, dt}{16 + 9\sin^2 t} = \frac{1}{12} \arctg x.$$

Розв'язання:

Маємо диференціальне рівняння:

$$\int_0^{\frac{dy}{dx}} \frac{\cos t \, dt}{16 + 9\sin^2 t} = \frac{1}{12} \arctg x,$$

$$\frac{1}{9} \int_0^{y'} \frac{d\sin t}{\frac{16}{9} + \sin^2 t} = \frac{1}{12} \arctg x,$$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} \arctg \left(\frac{3}{4} \sin t \right) \Big|_0^{y'} = \frac{1}{12} \arctg x,$$

$$\arctg \left(\frac{3}{4} \sin y' \right) = \arctg x,$$

$$\sin y' = \frac{4}{3} (x + \pi k),$$

$$y' = \pi n + (-1)^n \arcsin \left[\frac{4}{3} (x + \pi k) \right],$$

$$|x + \pi k| \leq \frac{3}{4}, \quad k, n \in \mathbb{Z},$$

$$y = \int \left[\pi n + (-1)^n \arcsin \left[\frac{4}{3} (x + \pi k) \right] \right] dx = \pi n x +$$

$$+ (-1)^n \left\{ (x + \pi k) \arcsin \frac{4(x + \pi k)}{3} + \frac{1}{4} [9 - 16(x + \pi k)^2]^{\frac{1}{2}} \right\} + C.$$

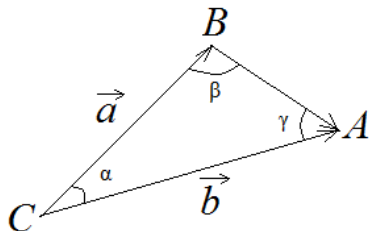
6. Довести, що для двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується нерівність

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^3 \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 |\vec{a} - \vec{b}|^2.$$

Розв'язання:

Доведемо, що для двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується нерівність

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^3 \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 |\vec{a} - \vec{b}|^2.$$



Оскільки $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$, то можемо записати:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \overrightarrow{BA}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{a} - \vec{b}| \sin \beta,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{b} \times \overrightarrow{BA}| = \frac{1}{2} |\vec{b}| |\vec{a} - \vec{b}| \sin \gamma.$$

Тоді

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^3 &= \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 |\vec{a} - \vec{b}|^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 |\vec{a} - \vec{b}|^2. \end{aligned}$$

Залишилося довести, що

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

за умови $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

7. Рівносторонні трикутники зі сторонами 1, 3, 5, ... розміщені в один ряд так, що їх основи знаходяться на одній прямій і впритул примикають одна до одної. Довести, що вершини трикутників, протилежні основам, розміщені на параболі та віддалені на цілочислову відстань від її фокуса.

Розв'язання:

Розмістити початок координат у середині першої основи.

Якщо $n = 1$, то $x_1 = 0$.

Якщо $n = 2$, то $x_2 = 2$,

$\Rightarrow x_n = n(n-1)$, $l_n = 2n-1$ - довжина n -ї основи.

Якщо $n = 3$, то $x_3 = 6$...

$$y = \sqrt{(2n-1)^2 - \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} = \pm \frac{2n-1}{2} \cdot \sqrt{3},$$

$$\begin{cases} x = n^2 - n, \\ y = \pm(2n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}y = \pm(2n-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2n-1 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}y,$$

$$n = \frac{1}{2} \pm \frac{y}{\sqrt{3}},$$

$$x = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{2} \mp \frac{y}{\sqrt{3}},$$

$$x = \frac{1}{4} \pm \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{y^2}{3} - \frac{1}{2} \mp \frac{y}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{y^2}{3} - \frac{1}{4}.$$

$y^2 = 3\left(x + \frac{1}{4}\right)$ – це рівняння параболи з фокусом у точці $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Відстань

$$\rho = \sqrt{\left(n(n-1) - \frac{1}{2}\right)^2 + (2n-1)^2 \frac{3}{4}} = n^2 - n + 1 - \text{ціле}.$$

II етап Всеукраїнської
студентської олімпіади з математики
(Суми, вересень 2014 р.)

Категорія Т

1. Знайти кут між кривими $y = px^2$ та $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ у точці їх перетину.
2. Нехай A – довільна матриця розміром $n \times n$ та I – одинична матриця такої самої розмірності, всі елементи якої дорівнюють 1. Довести, що $\det(A + I) = \det A$ тоді і лише тоді, коли сума алгебраїчних доповнень усіх елементів матриці A дорівнює нулю ($\sum_{ij}^n A_{ij} = 0$).
3. Довести, що якщо a, b, c – комплексні числа і
 $|a| = |b| = |c| = r \neq 0$, то
$$|(ab + bc + ca)/(a + b + c)| = r.$$
4. Сфера радіуса R котиться по двох прямих, що перетинаються, нахилені до горизонту під однаковими кутами і утворюють між собою кут 2α . Довести, що при

цьому центр сфери описує дугу еліпса з півсями $R/\sin \alpha$ і R .

5. Знайти диференційовані функції $u: R \rightarrow R$, що задовольняють вирази

$$u'(t) = u(t) + \int_0^1 u(\tau) d\tau, \quad u(0) = 1.$$

6. а) Довести, що існує многочлен $P_4(x)$ четвертого степеня такий, що

$$\int_{n-1}^n P_4(x) dx = n^4$$

для будь-якого натурального n .

- б) Знайти

$$\sum_{k=1}^n k^4.$$

7. Знайти значення параметрів a, b, c , при яких

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 - 2x^2 - 3} - ax^2 - bx - c \right) = 0.$$

Категорія T

Розв'язування

1. Знайти кут між кривими $y = px^2$ та $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ у точці їх перетину.

Розв'язання:

Нормалі до кривих $\vec{n}_1(-2px, 1)$ і $\vec{n}_2(x, 2y)$.

Їх скалярний добуток дорівнює $-2px^2 + 2y = 0$.

Кут дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

2. Нехай A – довільна матриця розміром $n \times n$ та I – одинична матриця такої самої розмірності, всі елементи якої дорівнюють 1. Довести, що $\det(A + I) = \det A$ тоді і лише тоді, коли сума алгебраїчних доповнень усіх елементів матриці A дорівнює нулю ($\sum_{ij}^n A_{ij} = 0$).

Розв'язання:

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ – матриці,

задані в умові.

Тоді визначник матриці $A + I$ має вигляд

$$|A + I| = \begin{vmatrix} (a_{11} + 1) & (a_{12} + 1) & \dots & (a_{1n} + 1) \\ (a_{21} + 1) & (a_{22} + 1) & \dots & (a_{2n} + 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{n1} + 1) & (a_{n2} + 1) & \dots & (a_{nn} + 1) \end{vmatrix}.$$

Використовуючи властивості визначників, його можна подати як суму двох визначників:

$$|A + I| = \begin{vmatrix} a_{11} & (a_{12} + 1) & \dots & (a_{1n} + 1) \\ a_{21} & (a_{22} + 1) & \dots & (a_{2n} + 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & (a_{n2} + 1) & \dots & (a_{nn} + 1) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & (a_{12} + 1) & \dots & (a_{1n} + 1) \\ 1 & (a_{22} + 1) & \dots & (a_{2n} + 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (a_{n2} + 1) & \dots & (a_{nn} + 1) \end{vmatrix}.$$

Перетворимо тепер другий визначник суми, віднімаючи від кожного стовпця, починаючи з другого, перший стовець.

Перший визначник, як і вище, розкладемо як суму двох визначників:

$$|A + I| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 1 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, що перший визначник суми збігається з визначником матриці A . Розкладемо тепер кожний визначник утвореної суми, починаючи з другого, за тим стовпцем, в якому стоять одиниці.

Очевидно, що

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n A_{1j},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 1 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n A_{2j}, \dots,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n A_{nj},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} .

Отже,

$$|A + I| = |A| + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n A_{ij} \text{ і тому } |A + I| = |A|$$

тоді і лише тоді, коли $\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = 0$.

3. Довести, що якщо a, b, c – комплексні числа і

$$|a| = |b| = |c| = r \neq 0, \text{ то}$$

$$|(ab + bc + ca)/(a + b + c)| = r.$$

Розв'язання:

Нехай

$$a = r_1 e^{i\varphi_1}; \quad b = r_2 e^{i\varphi_2}; \quad c = r_3 e^{i\varphi_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab + bc + ac = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} + r_2 r_3 e^{i(\varphi_2 + \varphi_3)} +$$

$$+ r_1 r_3 e^{i(\varphi_1 + \varphi_3)} = r^2 (e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} + e^{i(\varphi_2 + \varphi_3)} + e^{i(\varphi_1 + \varphi_3)}),$$

$$a + b + c = r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 e^{i\varphi_2} + r_3 e^{i\varphi_3},$$

$$\left| \frac{r(e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} + e^{i(\varphi_2 + \varphi_3)} + e^{i(\varphi_1 + \varphi_3)})}{e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} + e^{i\varphi_3}} \right| =$$

$$= \left| \frac{r e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)} (e^{-i\varphi_3} + e^{-i\varphi_1} + e^{-i\varphi_2})}{e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} + e^{i\varphi_3}} \right|.$$

$$|e^{i\varphi}| = |e^{-i\varphi}|, \quad |e^{i\psi}| = 1, \quad (\psi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3).$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi.$$

4. Сфера радіуса R котиться по двох прямих, що перетинаються, нахилених до горизонту під однаковими кутами і утворюють між собою кут 2α . Довести, що при цьому центр сфери описує дугу еліпса з півсями $R/\sin \alpha$ і R .

Розв'язання:

Виберемо прямокутну систему координат так, щоб її початок збігався з точкою перетину прямих Om і On , вісь Ox була напрямлена по бісектрисі кута між цими прямими, а площина XZ збігалася з площиною, що ними визначається, (див. рис.1).

Нехай $(x, y, 0)$ – координати центра сфери, тобто точка C .
 A – точка дотику кулі і прямої Om .
 B – основа перпендикуляра, опущеного з точки C на площину XZ .

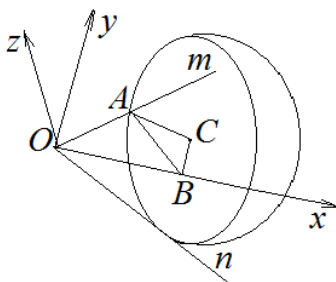


Рисунок 1

Тоді $AC^2 = AB^2 + BC^2$, $AC = R$, $CB = y$, $BC = x \sin \alpha$,

$$R^2 = y^2 + x^2 \sin^2 \alpha,$$

$$\frac{y^2}{R^2} + \frac{x^2 \sin^2 \alpha}{R^2} = 1,$$

$$\frac{y^2}{R^2} + \frac{x^2}{\frac{R^2}{\sin^2 \alpha}} = 1,$$

$$a = R, \quad b = \frac{R}{\sin \alpha} = R \operatorname{cosec} \alpha.$$

5. Знайти диференційовані функції $u: R \rightarrow R$, що задовольняють вирази

$$u'(t) = u(t) + \int_0^1 u(\tau) d\tau, \quad u(0) = 1.$$

Розв'язання:

Нехай

$$b = \int_0^1 u(\tau) d\tau.$$

Перше відношення матиме вигляд

$$u'(t) = u(t) + b,$$

а розв'язок цього рівняння $u(t) = Ce^x - b$.

Тоді

$$b = \int_0^1 (Ce^x - b) dx = C(e - 1) - b,$$

$$u(0) = C - b = 1.$$

Таким чином, маємо систему

$$\begin{cases} C - b = 1, \\ C(e - 1) - 2b = 0, \end{cases} \Rightarrow b = \frac{e - 1}{3 - e}, \quad C = \frac{2}{3 - e}.$$

Отже,

$$u(t) = \frac{1}{3 - e} (2e^t - e + 1).$$

6. а) Довести, що існує многочлен $P_4(x)$ четвертого степеня такий, що

$$\int_{n-1}^n P_4(x) dx = n^4$$

для будь-якого натурального n .

б) Знайти

$$\sum_{k=1}^n k^4.$$

Розв'язання:

а) Будемо шукати многочлен четвертого степеня, що задовольняє умову задачі

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Обчисливши інтеграл і прирівнявши коефіцієнти при степенях n у спільних частинах, отримаємо систему відносно невідомих a, b, c, d, e з трикутною матрицею

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/4 & 1/3 & -1/2 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Звідси знаходимо поліном

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$

$$\text{б) } \sum_{k=1}^n k^4 = \int_0^n P(x) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{30}x \right) \Big|_0^n =$$

$$= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} = \frac{n}{30} (6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1).$$

7. Знайти значення параметрів a, b, c , при яких

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 - 2x^2 - 3} - ax^2 - bx - c) = 0.$$

Розв'язання:

Знайти значення параметрів a, b, c , при яких

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 - 2x^2 - 3} - ax^2 - bx - c) = 0,$$

можливо лише при $a > 0$.

Помножимо і поділимо на спряжені вирази:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^4 - 2x^2 - 3})^2 - (ax^2 + bx + c)^2}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 3} + ax^2 + bx + c} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 - 3 - a^2x^4 - b^2x^2 - c^2 - 2abx^3 - 2acx^2 - 2bcx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 3} + ax^2 + bx + c} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - a^2)x^4 - 2abx^3 - (b^2 + 2ac + 2)x^2 - 2bcx - c^2 - 3}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 3} + ax^2 + bx + c}, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a > 0, \\ 1 - a^2 = 0, \\ -2ab = 0, \\ b^2 + 2ac + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \\ 2ac = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \\ c = -1. \end{cases}$$

$$\text{Отже, } \begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \\ c = -1. \end{cases}$$

II етап Всеукраїнської
студентської олімпіади з математики
(Суми, вересень 2014 р.)

Категорія С

1. Записати рівняння дотичної до графіка парної функції

$y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$, якщо відомо, що для всіх дійсних x справедлива рівність

$$f(2x^3 - x) - 4x^2 \cdot f(x^2 - x - 1) = x^5 - 8x^3 - 11x^2 + 2.$$

2. Знайти значення параметрів a, b, c , при яких

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 - 2x^2 - 3} - ax^2 - bx - c \right) = 0.$$

3. Функція $f \in C^2(R)$ обмежена. Довести, що існує x_0 таке, що $f''(x_0) = 0$.

4. Снігопад почався ще до обіду і продовжувався до смеркання, не посилюючись і не зменшуючись. Рівно опівдні бригада дорожніх майстрів вийшла на дорогу і почала прибирати сніг. За перші 2 години робітники

розчистили від снігу 2 км дороги, а за наступні 2 години вони прибрали лише 1 км. За однакові проміжки часу бригада прибирала однакові об'єми снігу. О котрій годині почався снігопад?

5. Знайти диференційовані функції $u: R \rightarrow R$, що задовольняють відношення

$$u'(t) = u(t) + \int_0^1 u(\tau) d\tau, \quad u(0) = 1.$$

6. Нехай A – матриця 4×2 і B – матриця 2×4 , елементами яких є дійсні числа n , при яких

$$AB = \begin{pmatrix} n & 0 & -n & 0 \\ 0 & n & 0 & -n \\ -n & 0 & n & 0 \\ 0 & -n & 0 & n \end{pmatrix}, \quad n \in N.$$

Знайти BA .

7. Рівносторонні трикутники зі сторонами 1, 3, 5, ... розміщені в один ряд так, що їх основи знаходяться на одній прямій і впритул примикають одна до одної. Довести, що вершини трикутників, протилежні основам, розміщені на параболі та віддалені на цілочислову відстань від її фокуса.

Категорія С

Розв'язування

1. Записати рівняння дотичної до графіка парної функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$, якщо відомо, що для всіх дійсних x справедлива рівність

$$f(2x^3 - x) - 4x^2 \cdot f(x^2 - x - 1) = x^5 - 8x^3 - 11x^2 + 2.$$

Розв'язання:

Потрібно записати рівняння дотичної до графіка парної функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$, якщо відомо, що для всіх дійсних x справедлива рівність

$$f(2x^3 - x) - 4x^2 \cdot f(x^2 - x - 1) = x^5 - 8x^3 - 11x^2 + 2.$$

Відповідь: $y = 2x + 1$.

2. Знайти значення параметрів a, b, c , при яких

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 - 2x^2 - 3} - ax^2 - bx - c \right) = 0.$$

Розв'язання:

Знайти значення параметрів a, b, c , при яких

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 - 2x^2 - 3} - ax^2 - bx - c \right) = 0,$$

можливо лише при $a > 0$.

Помножимо і поділимо на спряжені вирази:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{x^4 - 2x^2 - 3} \right)^2 - (ax^2 + bx + c)^2}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 3} + ax^2 + bx + c} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 - 3 - a^2x^4 - b^2x^2 - c^2 - 2abx^3 - 2acx^2 - 2bcx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 3} + ax^2 + bx + c} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - a^2)x^4 - 2abx^3 - (b^2 + 2ac + 2)x^2 - 2bcx - c^2 - 3}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 3} + ax^2 + bx + c}. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a > 0, \\ 1 - a^2 = 0, \\ -2ab = 0, \\ b^2 + 2ac + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \\ 2ac = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \\ c = -1. \end{cases}$$

$$\text{Отже, } \begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \\ c = -1. \end{cases}$$

3. Функція $f \in C^2(R)$ обмежена. Довести, що існує x_0 таке, що $f''(x_0) = 0$.

Розв'язання:

Функція $f \in C^2(R)$ обмежена. Потрібно довести, що існує x_0 таке, що $f''(x_0) = 0$.

Доведемо методом від протилежного.

Припустимо, що $f''(x) > 0 \quad \forall x \Rightarrow f'(x)$ зростає, тобто $f'(x_1) > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_1) \quad \forall x > x_1$.

Тоді

$$f(x) = f(x_1) + \int_{x_1}^x f'(x) dx > f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \rightarrow \infty,$$

$x \rightarrow \infty$, але вона обмежена, що суперечить.

Якщо $f'(x_2) < 0$, то $f(x) < f(x_2)$ при $\forall x > x_2$, тоді

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_2) + \int_{x_2}^x f'(x) dx = (x < x_2) = \\ &= f(x_2) - \int_x^{x_2} f'(x) dx \geq f(x_2) - (x_2 - x)f'(x_2) = \\ &= f(x_2) - (x - x_2)f'(x_2) \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

4. Снігопад почався ще до обіду і продовжувався до смеркання не посилюючись і не зменшуючись. Рівно опівдні бригада дорожніх майстрів вийшла на дорогу і почала прибирати сніг. За перші 2 години робітники розчистили від снігу 2 км дороги, а за наступні 2 години вони прибрали лише 1 км. За однакові проміжки часу бригада прибирала однакові об'єми снігу. О котрій годині почався снігопад?

Розв'язання:

Нехай b – швидкість випадання снігу (зростання товщини снігового покриву – в см/год), а c – швидкість прибирання снігу, см · км/год.

Нехай снігопад розпочався за h годин до полудня. В момент часу t (відлік часу від полудня) перед бригадою дорожніх робітників знаходиться ділянка шосе, вкрита шаром снігу товщиною $b \cdot (h + t)$, а швидкість v_t просування бригади по шосе відповідно дорівнює $\frac{c}{[b \cdot (h+t)]}$ км/год.

За час t бригада віддалиться від міста по шосе на відстань

$$x_t = \int_0^t V_t dt = \frac{c}{b} \int_0^t \frac{1}{h+t} dt = \frac{c}{b} \ln(h+t) \Big|_0^t = \frac{c}{b} [\ln(h+t) - \ln h].$$

$$\text{Якщо } t = 2 \Rightarrow \frac{c}{b} [\ln(h+2) - \ln h] = 2,$$

$$\text{якщо } t = 4 \Rightarrow \frac{c}{b} [\ln(h+4) - \ln h] = 3,$$

$$\frac{[\ln(h+2) - \ln h]}{[\ln(h+4) - \ln h]} = \frac{2}{3},$$

$$\ln \left(1 + \frac{2}{h}\right)^3 = \ln \left(1 + \frac{4}{h}\right)^2,$$

$$\left(1 + \frac{2}{h}\right)^3 = \left(1 + \frac{4}{h}\right)^2.$$

Оскільки $h \neq 0$, то $h^2 + 2h - 4 = 0$, отже, $h = \sqrt{5} - 1$,
тобто це приблизно 1 год 14 хв 10 с.

Звідси випливає, що снігопад почався о 10 год 45 хв 50 с.

5. Знайти диференційовані функції $u: R \rightarrow R$, що задовольняють відношення

$$u'(t) = u(t) + \int_0^1 u(\tau) d\tau, \quad u(0) = 1.$$

Розв'язання:

$$\text{Нехай } b = \int_0^1 u(\tau) d\tau.$$

Перше відношення матиме вигляд

$$u'(t) = u(t) + b,$$

а розв'язок цього рівняння $u(t) = Ce^x - b$.

Тоді

$$b = \int_0^1 (Ce^x - b) dx = C(e - 1) - b,$$

$$u(0) = C - b = 1.$$

Таким чином, маємо систему

$$\begin{cases} C - b = 1, \\ C(e - 1) - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{e - 1}{3 - e}, \quad C = \frac{2}{3 - e}.$$

$$\text{Отже, } u(t) = \frac{1}{3 - e} (2e^t - e + 1).$$

6. Нехай A – матриця 4×2 і B – матриця 2×4 , елементами яких є дійсні числа n , при яких

$$AB = \begin{pmatrix} n & 0 & -n & 0 \\ 0 & n & 0 & -n \\ -n & 0 & n & 0 \\ 0 & -n & 0 & n \end{pmatrix}, \quad n \in N.$$

Знайти BA .

Розв'язання:

Матриці A і B запишемо в блоковому вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad \text{де } A_1, A_2, B_1, B_2 \text{ – матриці другого}$$

порядку.

Оскільки

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} (B_1 \ B_2) = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} n & 0 & -n & 0 \\ 0 & n & 0 & -n \\ -n & 0 & n & 0 \\ 0 & -n & 0 & n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{то } A_1 B_1 = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad A_2 B_1 = \begin{pmatrix} -n & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix},$$

$$A_1 B_2 = \begin{pmatrix} -n & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix}, \quad A_2 B_2 = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}.$$

Тому $A_1 B_1 = A_2 B_2 = nE$, $A_1 B_2 = A_2 B_1 = -nE$,

а це означає, що $B_1 A_1 = B_2 A_2 = nE$.

З іншого боку,

$$BA = (B_1 \ B_2) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = B_1 A_1 + B_2 A_2 = 2nE = \begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отже, } BA = \begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{pmatrix}.$$

7. Рівносторонні трикутники зі сторонами 1, 3, 5, ... розміщені в один ряд так, що їх основи знаходяться на одній прямій і впритул примикають одна до одної. Довести, що вершини трикутників, протилежні основам, розміщені на параболі та віддалені на цілочислову відстань від її фокуса.

Розв'язання:

Розмістити початок координат у середині першої основи.

Якщо $n = 1$, то $x_1 = 0$.

Якщо $n = 2$, то $x_2 = 2$,

$\Rightarrow x_n = n(n-1)$, $l_n = 2n-1$ - довжина n -ї основи.

Якщо $n = 3$, то $x_3 = 6$...

$$y = \sqrt{(2n-1)^2 - \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} = \pm \frac{2n-1}{2} \cdot \sqrt{3},$$

$$\begin{cases} x = n^2 - n, \\ y = \pm(2n-1) \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}y = \pm(2n-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n-1 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}y,$$

$$n = \frac{1}{2} \pm \frac{y}{\sqrt{3}},$$

$$x = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{2} \mp \frac{y}{\sqrt{3}},$$

$$x = \frac{1}{4} \pm \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{y^2}{3} - \frac{1}{2} \mp \frac{y}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{y^2}{3} - \frac{1}{4}.$$

$y^2 = 3\left(x + \frac{1}{4}\right)$ – це рівняння параболи з фокусом у точці $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Відстань

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left((2n-1)\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2} = n^2 - n + 1 \text{ є ціле число.}$$

Навчальне видання

3912 ЗБІРНИК ЗАДАЧ
із математики

“Математична олімпіада – 2014”

(за матеріалами другого етапу олімпіади з математики
серед студентів вищих технічних навчальних закладів України)

Відповідальний за випуск В. О. Ячменьов
Редактор С. М. Симоненко
Комп’ютерне верстання В. В. Ніколенко

Підписано до друку 22.04.2015, поз.
Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 2,33. Обл.-вид. арк. 1,17.
Тираж 30 пр. Зам. №
Собівартість вид. грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідectво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.