Категорія М

Задача 1

Довести справедливість співвідношення

$$f(x) = 2f(\pi/4 + x/2) - 2f(\pi/4 - x/2) - x\ln 2,$$

де $f(x) = -\int_0^x \ln\cos y\, dy$.

Обчислити за допомогою знайденого співвідношення

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\int_0^{\pi/2} \ln\cos y\, dy.$$

Розв'язання

Фактично потрібно довести справедливість співвідношення

$$-\int_0^x \ln\cos y\, dy = -2\int_0^{\pi/4 + x/2} \ln\cos y\, dy + 2\int_0^{\pi/4 - x/2} \ln\cos y\, dy - x\ln 2. \qquad (*)$$

Перетворимо ліву частину цієї рівності за допомогою підстановки $y = \pi/2 - z$. Маємо:

$$-\int_0^x \ln\cos y\, dy = +\int_{\pi/2}^{\pi/2 - x} \ln\sin z\, dz.$$

Враховуючи, що $\sin z = 2\sin(z/2)\cos(z/2)$, маємо:

$$\int_{\pi/2}^{\pi/2 - x} \ln\sin z\, dz = \int_{\pi/2}^{\pi/2 - x} \ln 2\, dz + \int_{\pi/2}^{\pi/2 - x} \ln\sin\frac{z}{2}\, dz + \int_{\pi/2}^{\pi/2 - x} \ln\cos\frac{z}{2}\, dz. \qquad (**)$$

Покажемо, що (*) і (**) тотожньо рівні:

а) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi/2 - x} \ln 2\, dz = -x\ln 2$;

б) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi/2 - x} \ln\sin\frac{z}{2}\, dz = \left\{\begin{matrix} \frac{z}{2} = \frac{\pi}{2} - y \\ dz = -2dy \end{matrix}\right\}, \left\{\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - y\right\} = -2\int_{\pi/4}^{\pi/4 + x/2} \ln\cos y\, dy$;

в) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi/2 - x} \ln\cos\frac{z}{2}\, dz = \left\{\begin{matrix} y = \frac{z}{2} \\ 2\, dy = dz \end{matrix}\right\} = \int_{\pi/4}^{\pi/4 - x/2} \ln\cos y \cdot 2dy = 2\int_{\pi/4}^{\pi/4 - x/2} \ln\cos y\, dy.$

Зібравши отримані інтеграли а), б) і в), отримуємо необхідне співвідношення.

І нарешті: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2}\ln 2 = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\ln 2.$

Звідси $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ln 2.$

Категорія M

Задача 2

На гіперболі $xy = 1$ взято точки A_n та B_n з абсцисами $\frac{n}{n+1}$ та $\frac{n+1}{n}$, $n = 1, 2, ...$, відповідно. Позначимо через O_n центр кола, що проходить через точки A_n, B_n і точку $(1; 1)$.

Чи існує гранична точка центрів O_n? Якщо така точка існує, то вкажіть її координати.

Розв'язання

Очевидно, що A_n, B_n симетричні відносно прямої $y = x$, тому всі центри O_n лежать на цій прямій. Якщо $C(1; 1)$, то O_n – це точка перетину прямої $y = x$ і прямої l_n, яка є серединним перпендикуляром відрізка A_nC. Середина A_nC – точка $(P_n;\ Q_n) = \left(\frac{2n+1}{2(n+1)};\ \frac{2n+1}{2n}\right)$.

Рівняння прямої A_nC (як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки) має вигляд:

$$(n + 1)x + ny = 2n + 1.$$

Тоді рівняння прямої l_n, а $l_n \perp A_nC$, можна записати так:

$$(x - P_n;\ y - Q_n) = t\left(\frac{1}{n};\ \frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow\ nx - (n + 1)y = -\frac{(2n+1)^2}{2n(n+1)},$$

звідки (підставляючи $x = y$) знаходимо

$$O_n = \left(\frac{(2n+1)^2}{2n(n+1)};\ \frac{(2n+1)^2}{2n(n+1)}\right) \Rightarrow\ (2; 2) \text{ – гранична точка.}$$

Відповідь: існує, $(2; 2)$.

Категорія М

Задача 3

Перевірте, чи існує функція $f(x) \in C^1[0,2]$, що задовольняє одночасно наступним умовам:

1) $f(0) = f(2) = 1$;
2) $|f'(x)| \leq 1$ для всіх $x \in (0,2)$;
3) $\left|\int_0^2 f(x)dx\right| \leq 1$.

Розв'язання

Нехай існує $f(x) \in C^1[0,2]$, що задовольняє всім трьом умовам. За теоремою Лагранжа (виконуються всі її умови)

$$f(x) - f(0) = f'(c_1) \cdot (x - 0), \qquad c_1 \in (0, x);$$
$$f(2) - f(x) = f'(c_2) \cdot (2 - x), \qquad c_2 \in (x, 2);$$

де x – довільна точка на $(0,2)$.

З першої умови:

$$f(x) = 1 + f'(c_1)x, \qquad f(x) = 1 + f'(c_2)(x - 2).$$

З другої умови:

$$f(x) \geq 1 + (-1) \cdot x = 1 - x,$$
$$f(x) \geq 1 + 1(x - 2) = x - 1.$$

Проінтегруємо ці нерівності і отримаємо:

$$\int_0^2 f(x) \geq 1.$$

Рівність задовольняє умові тільки тоді, коли $f(x) = |x - 1|$, але й це суперечить умовам задачі.

Категорія М

Задача 4

Обчислити визначник n-го порядку

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Спочатку розкладемо визначник за першим рядком. Один з отриманих визначників $(n-1)$-го порядку розкладемо за першим стовпчиком.

Отримаємо рекурентне співвідношення

$$\Delta_n = 3\Delta_{n-1} + 4\Delta_{n-2}.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n z^{n-1} = \Delta_1 + \Delta_2 z + \Delta_3 z^2 + \cdots$$

Так як

$\Delta_1 = 3,$

$\Delta_2 = 13,$

…………………..,

$\Delta_n = 3\Delta_{n-1} + 4\Delta_{n-2}, n \geq 2,$

…………………...

Помножимо праві та ліві частини цих рівнянь на $1, z, z^2, \dots, z^{n-1}, \dots$ і склавши їх, маємо:

$$\Delta_1 + \Delta_2 z + \sum_{n=3}^{\infty} \Delta_n z^{n-1} = 3 + 13z + 3\sum_{n=3}^{\infty} \Delta_{n-1} z^{n-1} + 4\sum_{n=3}^{\infty} \Delta_{n-2} z^{n-1}.$$

Зліва знаходиться функція $g(z)$. Перетворимо відповідно праву частину:

а) $\sum_{n=3}^{\infty} \Delta_{n-1} z^{n-1} = \Delta_2 z^2 + \Delta_3 z^3 + \cdots = z(\Delta_2 z + \Delta_3 z^2 + \cdots) =$

$= z(\Delta_2 z + \Delta_3 z^2 + \cdots + \Delta_1 - \Delta_1) = z\,(g(z) - 3);$

б) $\sum_{n=3}^{\infty} \Delta_{n-2} z^{n-1} = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n z^{n-1} = z^2 g(z).$

Отримаємо

$$g(z) = 3 + 13z + 3(z\,g(z) - 3z) + 4z^2 g(z),$$

або

$$(1 - 3z - 4z^2) g(z) = 3 + 13z - 9z.$$

Звідси

$$g(z)=-\frac{4z+3}{4z^2+3z-1}=-\frac{4z+3}{(z+1)(-1+4z)}=-\left[\frac{1}{5(z+1)}+\frac{16}{5(-1+4z)}\right].$$

Так як

$$\frac{1}{z+1}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}z^{k-1};\frac{1}{4z-1}=-\sum_{k=0}^{\infty}4^k z^k=-\sum_{k=1}^{\infty}(4z)^{k-1},$$

то

$$g(z)=-\left[\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}z^{k-1}-\frac{16}{5}\sum_{k=1}^{\infty}4^{k-1}z^{k-1}\right]=-\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}[(-1)^{k-1}-16\cdot 4^{k-1}]z^{k-1},$$

$$g(z)=\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}[4^{k+1}-(-1)^{k-1}]z^{k-1}.$$

Відповідь: $\Delta_k=\frac{1}{5}[4^{k+1}-(-1)^{k-1}]$.

Задача 5

З точки A кидають камінь масою m у сторону цілі, яка віддалена від точки A на відстань s по горизонталі і на відстань h по вертикалі. Знайдіть мінімальну величину початкової швидкості каменю, за якої можна влучити у ціль. Сила тяжіння напрямлена вертикально вниз, а силами опору можна знехтувати.

Розв'язання

Нехай камінь кинутий під кутом α до горизонту і влучив у ціль. Його переміщення по горизонталі s і по вертикалі h можуть бути записані таким чином:

$$s = (v_0 \cos\alpha)t;$$

$$h = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Оскільки час польоту каменя t нас не цікавить, виключимо його з цих рівнянь. Виразивши t з першого рівняння і підставляючи в друге, отримуємо:

$$h = s\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gS^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \quad (1)$$

Це рівняння містить дві невідомі величини v_0 і α і має безліч розв'язків, що відповідає можливості влучити у ціль нескінченним числом способів. З цих розв'язків нам потрібно вибрати ті, які відповідають мінімальному значенню v_0. Прямий шлях розв'язання цього завдання полягає у знаходженні v_0 як функції від α з рівняння (1) і дослідженні цієї функції на екстремум. Ми зробимо інакше.

Так як $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha$, то з (1) слідує:

$$gs^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 2v_0^2\,s\,\mathrm{tg}\,\alpha + gs^2 + 2v_0^2 h = 0. \quad (2)$$

Розв'язавши дане рівняння, отримаємо

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{gs}\left[v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gs^2 + 2v_0^2 h)}\right].$$

Зрозуміло, що дискримінант має бути невід'ємним:

$$v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2s^2 \geq 0.$$

Легко переконатися, що мінімальне значення v_0^2, за якого це співвідношення справедливе, відповідає випадку рівності. Таким чином,

$$v_{0\,min}^2 = g\left(h + \sqrt{h^2 + s^2}\right).$$

Другий корінь не має фізичного змісту, бо квадрат швидкості є величина додатня.

$$v_{0\,min} = \sqrt{g\left(h + \sqrt{h^2 + s^2}\right)}.$$

Категорія М

Задача 6

Знайти границю послідовності:

$$a_n = \frac{n^2}{\sqrt[n]{(n^2+1^2)(n^2+2^2)\cdot\ldots\cdot(n^2+n^2)}}.$$

Розв'язання

$$\ln a_n = \ln\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-\frac{1}{n}}\right\} = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = \ln(1+x^2), & dv = dx \\ du = \dfrac{2x}{1+x^2}, & v = x \end{matrix}\right\} = -x\ln(1+x^2)\big|_0^1 - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = 2 - \ln 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}e^{2-\frac{\pi}{2}}$

Відповідь: $\frac{1}{2}e^{2-\frac{\pi}{2}}$.

Категорія М

Задача 7

Довести, що $\forall n \in N$ многочлен $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ не може мати більше одного дійсного кореня.

Розв'язання

Нехай многочлен $P_n(x)$ має більш як один дійсний корінь, і нехай x_1 і x_2 – корені многочлена $(x_1 < x_2)$, такі що інтервал (x_1, x_2) не містить інших дійсних коренів заданого многочлена. Із умови задачі випливає, що $x_1 < 0$ і $x_2 < 0$, бо многочлен $P_n(x)$ може мати лише від'ємні корені.

Враховуючи рівність

$$P_n'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

отримаємо $P_n(x) = P_n'(x) + \frac{x^n}{n!}$, отже $P_n'(x_1) = -\frac{x_1^n}{n!}$, $P_n'(x_2) = -\frac{x_2^n}{n!}$. Звідси випливає, що в точках x_1 і x_2 похідна $P_n'(x)$ має однакові знаки. Тоді в деякому правому півоколі точки x_1 і в деякому лівому півоколі точки x_2 многочлен буде мати різні знаки. Звідси випливає, що $\exists x_3 \in (x_1, x_2)$, для якого $P(x_3) = 0$. Дістали суперечність.

Це означає, що многочлен $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ має не більше як один дійсний корінь, що і потрібно було довести.