

## Категорія М

### 1. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$$

при  $n = 2017, x = 2$ .

#### Розв'язання

Розкладемо даний визначник  $\Delta_n$ , де  $n = 2017$  по  $n$ -му стовпцю.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix} = n(-1)^{1+n} \cdot \begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} + x(-1)^{n+n} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Далі розкладемо перший визначник по першому стовпцю. Другий визначник є ніщо інше як  $\Delta_{n-1}$ , тобто

$$n(-1)^{1+n} \cdot \begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} + x(-1)^{n+n} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} = n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} + x(-1)^{2n} \Delta_{n-1} = n + x\Delta_{n-1}.$$

При  $x = 2$  отримаємо

$$\Delta_n = n + 2\Delta_{n-1} = 2\Delta_{n-1} + n$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Delta_n + n + 2 &= (2\Delta_{n-1} + n) + n + 2 = 2(\Delta_{n-1} + n + 1) = 2(2\Delta_{n-2} + (n-1) + n + 1) \\ &= 2(2\Delta_{n-2} + 2n) = 2^2(\Delta_{n-2} + n) = 2^2(2\Delta_{n-3} + (n-2) + n) \\ &= 2^2(2\Delta_{n-3} + 2n - 2) = 2^3(\Delta_{n-3} + n - 1) = 2^3(2\Delta_{n-4} + (n-3) + n - 1) \\ &= 2^3(2\Delta_{n-4} + 2n - 4) = 2^4(\Delta_{n-4} + n - 2) = \dots = 2^{n-1}(\Delta_{n-(n-1)} + n - (n-3)) \\ &= 2^{n-1}(\Delta_1 + 3) = 2^{n-1}(1 + 3) = 2^{n+1} \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\Delta_n = 2^{n+1} - n - 2$$

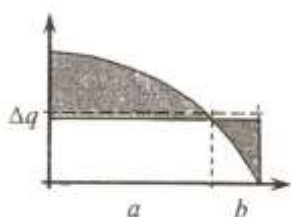
Отже,

$$\Delta_{2017} = 2^{2018} - 2017 - 2 = 2^{2018} - 2019$$

**Відповідь:** при  $x = 2 \cdot \Delta_{2017} = 2^{2018} - 2019$

### 2. Знайти значення параметра $q$ , при якому інтеграл $\int_0^{\pi/2} |\cos x - q| dx$ приймає найменше значення.

#### Розв'язання



Значення інтеграла дорівнює сумі площ двох криволінійних трикутників, які обмежені косинусоїдою  $y = \cos x$  і прямою  $y = q$ . Досліджуємо, як змінюється ця сума при зміні  $q$  на

невелику додатню величину  $\Delta q$ . Ми бачимо, що «ліва» площа зменшилася приблизно на  $a\Delta q$ , а «права» – збільшилася на  $b\Delta q$ , в цілому площа зменшиться на  $(a - b)\Delta q$ . Якщо  $a > b$ , то площу, яку шукаємо, можна зменшити, збільшуючи  $q$ . Аналогічно, якщо  $a < b$ , її можна зменшити, зменшуючи  $q$ . Ми бачимо, сума площ мінімальна, коли  $a = b = \pi/4$ . Тому найменше значення інтегралу досягається при  $q = \cos \pi/4$ .

Примітка. В розв'язанні використовується тільки той факт, що косинус – неперервна монотонно спадаюча на заданому проміжку функція.

**Відповідь:**  $q = \sqrt{2}/2$ .

3. Відомо, що найбільший кут, під яким еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

може перетинати концентричне коло, дорівнює  $45^\circ$ . Знайти відношення  $a/b$  піввісей еліпса.

**Розв'язання**

Пусть  $P(x_0, y_0)$  – точка пересечения еліпса и окружности  $x^2 + y^2 = r^2$ , лежащие в первой четверти.

Уравнение касательной  $l_e$  к эллипсу в точке  $P$  имеет вид  $\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$ , а уравнение касательной  $l_0$  к окружности в  $P$  -  $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$ . Из этих уравнений находим  $x_0$  и  $y_0$ :  $x_0^2 = \frac{a^2(r^2 - b^2)}{a^2 - b^2}$ ,  $y_0^2 = \frac{(a^2 - r^2)b^2}{a^2 - b^2}$ .

Угол  $\varphi = (\widehat{l_e, l_0}) = (\widehat{n_e, n_0}) = \left( \left\{ \frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2} \right\}, \{x_0, y_0\} \right)$ , где  $n_e = \left\{ \frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2} \right\}$ ,  $n_0 = \{x_0, y_0\}$  – нормали  $P(x_0, y_0)$  к эллипсу и окружности соответственно.

$$\cos \varphi = \frac{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}{\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{1 \cdot ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - r^2} \cdot r} = f(r).$$

Для нахождения  $\min f(r)$  находим решения уравнения  $f'(r) = 0$ , т.е. решения уравнения

$$\frac{a^2 + b^2 - 2r^2}{\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}} = 0. \text{ Отсюда } r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}. \text{ Тогда } \cos \varphi_0 = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + b^2)/2} \sqrt{(a^2 + b^2)/2}} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

$$\text{По условию } \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sim \frac{2t}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( t = \frac{a}{b} \right) \Rightarrow t = \sqrt{2} + 1.$$

**Відповідь:**  $\frac{a}{b} = \sqrt{2} + 1$ .

4. Нехай  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – додатні числа. Довести, що многочлен  $x^n - a_1x^{n-1} - \dots - a_n$  має тільки один додатній корінь.

**Розв'язання**

$$\text{Решим функцию } f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}.$$

На полуоси  $(0, +\infty)$  функция  $f(x)$  строго убывает от  $+\infty$  до 0. Следовательно, существует единственное положительное такое, что  $f(x_0) = 1$ , т.е.

$$\frac{a_1}{x_0} + \frac{a_2}{x_0^2} + \dots + \frac{a_n}{x_0^n} = 1.$$

5. Нехай  $p(x) = 2x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ ,  $f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{p(x)}$ . Знайти: а) множину задання функції  $f$ ; б) точку мінімуму функції  $f$ .

**Розв'язання**

$$1) D(f) = (-1; 5)$$

$$2) f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{p(x)} = \left[ \tau = \frac{1}{x} \right] = - \int_{+\infty}^0 \frac{\tau^6 d\tau}{\tau^{2+\alpha} p(\tau)} = \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{4-\alpha} d\tau}{p(\tau)} \Rightarrow$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} (f(\alpha) + f(4 - \alpha)) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(x^\alpha + x^{4-\alpha}) dx}{p(x)} \geq \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{p(x)} = f(2), \forall \alpha \in (-1; 5).$$

Следовательно,  $\alpha = 2$  – точка мінімуму  $f$ .

6. Довести, що функція  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos nx$  при  $|a_0| < 1$ , приймає як додатні, так і від'ємні значення.

**Розв'язання**

$$I_{\pm} = \int_0^{2\pi} f(x)(1 \pm \cos x) dx = \int_0^{2\pi} \left( \frac{a_0}{2} \pm \cos^2 x \right) dx = \pi(a_0 \pm 1)$$

$I_+ > 0, I_- < 0$ .

Если  $f(x) \geq 0$ , то оба интеграла будут  $\geq 0$  и  $f(x) \leq 0$ , то оба интеграла будут  $\leq 0$ . Следовательно, функция  $f(x)$  принимает значения разных знаков.

7. Нехай  $f \in C^{(n+1)}(R)$  та  $\ln \left( \frac{f(b)+f'(b)+\dots+f^{(n)}(b)}{f(a)+f'(a)+\dots+f^{(n)}(a)} \right) = b - a$ , де  $a < b$ . Довести, що знайдеться  $c \in (a, b)$  таке, що  $f^{(n+1)}(c) = f(c)$ .

**Розв'язання**

Пусть  $g(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) \Rightarrow g(b) = g(a) \cdot e^{b-a}$ .

Функція  $h(x) = e^{-x}g(x)$

$$h(b) = e^{-b}g(b)$$

$$h(a) = e^{-a}g(a)$$

и применим к ней теорему Ролля ( $h(a) = h(b)$ ):

$c \in (a, b)$  таке, що  $h'(c) = -e^{-c}g(c) + e^{-c}g'(c) = 0 \Rightarrow g'(c) = g(c)$ .