# Лекція 4.  Пряма на площині.

**Рівнянням лінії** в декартових координатах на площині називається рівняння вигляду $F(x;y)=0$, яке задовольняють координати $(x;y)$ будь – якої точки цієї лінії і не задовольняють координати будь – якої точки, що не належить цій лінії.

## 4.2 Загальне рівняння прямої.

У прямокутній системі координат пряма лінія задається рівнянням першого степеня відносно $x$ і $y$.

і навпаки, дане рівняння при довільних $A$, $B$, $C$ ($A$ і $B$ одночасно не дорівнюють нулю) визначає деяку пряму в прямокутній системі координат $Oxy$.

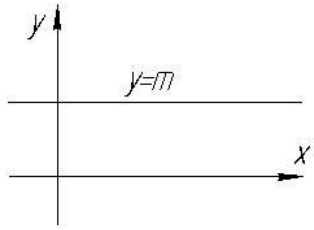
Вказане рівняння називається **загальним рівнянням прямої лінії.**

Дослідимо це рівняння.

Якщо A=0, $By+C=0$

$y=-\dfrac{C}{B}=m$ - рівняння прямої, паралельної осі Ox.

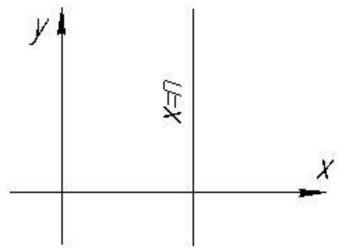
$y=0$ - рівняння осі абсцис (Ox)




Якщо B=0, то $Ax+C=0$, то

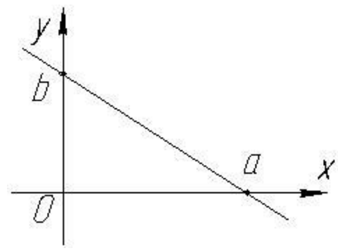
$x=-\dfrac{C}{A}=n$ - рівняння прямої, паралельної осі Oy

Якщо: $x=0$ - рівняння осі ординат (Oy)

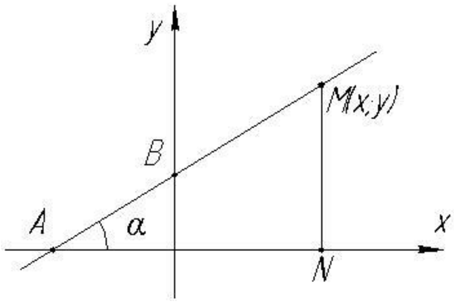



## 4.3 Рівняння прямої у відрізках на осях.

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1.$

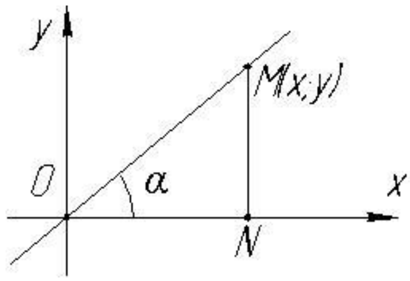


## 4.4 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.



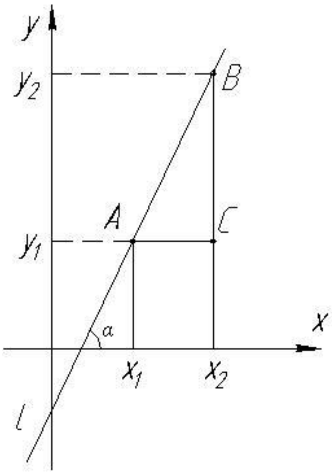

$y = kx + b$

$OB = в$ – початкова координата, $k = tg\alpha = \dfrac{MN}{AN}$ - кутовий коефіцієнт прямої.




Якщо пряма проходить через початок координат, то $k = tg\alpha = \dfrac{MN}{ON} = \dfrac{y}{x}$

## 4.5 Рівняння прямої, що проходить через дві точки.




## 4.6 Взаємне розміщення прямих на площині.

Нехай прямі $l_1$ і $l_2$ задані відповідними рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

$l_1 \sim \quad y = k_1x + b_1$

$l_2 \sim \quad y = k_2x + b_2$

1) якщо $k_1 \neq k_2$, то прямі перетинаються в одній точці;
***2)*** якщо $k_1 = k_2$, то прямі мають однаковий кут нахилу до осі Ox, а значить паралельні.

$$tg\varphi = tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta \cdot tg\alpha} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$$

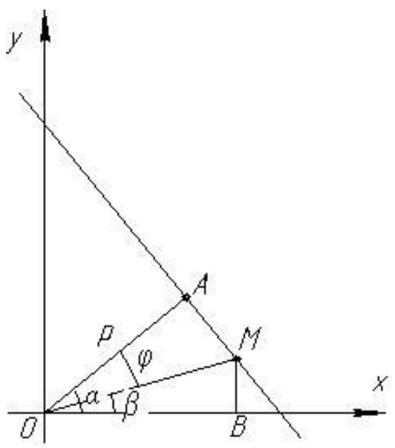
Отже $tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$ - тангенс кута між двома прямими.

Якщо прямі $l_1$ і $l_2$ паралельні**,** то

Якщо прямі $l_1$ і $l_2$ перпендикулярні**,** то

## 4.7 Нормальне рівняння прямої.

Нехай $l$ - це пряма, $OA = p$ - перпендикуляр( відстань), проведений від початку координат до прямої, $\alpha$ - кут нахилу цього перпендикуляра до осі Ох, $M(x;\ y)$ - довільна точка прямої.




- **нормальне рівняння прямої**.

З рівності $\mu C = -p$ можна зробити висновки:

1) $\mu$ і $C$ мають різні знаки ( бо $p > 0$, $p$ - відстань);

2) в нормальному рівнянні прямої знак $\mu$ (знак перед квадратним коренем) беремо протилежний до С.

Щоб знайти відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ необхідно:

– записати нормальне рівняння прямої;

– в це рівняння підставити координати точки, відстань від якої ми знаходимо;

– взяти одержану відповідь по модулю.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

# Криві другого порядку.

**Кривою другого порядку** називається множина М точок площини, координати яких задовольняють рівняння другого степеня

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a_0 = 0,$$ де $a_{ij}$ - дійсні числа.

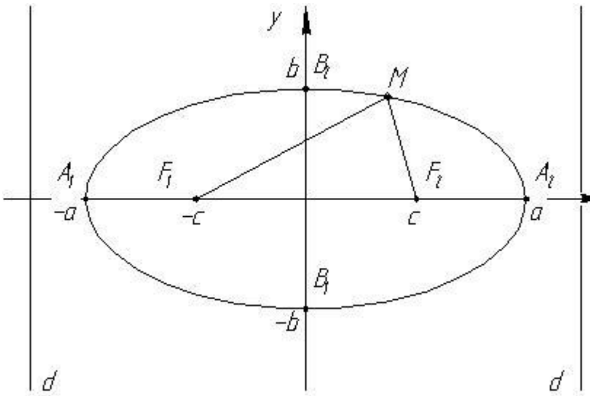
До кривих другого порядку відносяться: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

**Коло** – це геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від даної точки, яка називається центром кола.

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, точка $O(a;\, b)$ - центр кола.

## 4.8. Еліпс.

**Еліпс** – це геометричне місце точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох заданих точок, які називаються фокусами, є величина стала і дорівнює *2а*.




Точка $M(x;\, y)$ - належить еліпсу, $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$ - фокуси, $MF_1$ і $MF_2$ - фокусні радіуси точки *М*.
За означенням $MF_1+MF_2=2a$

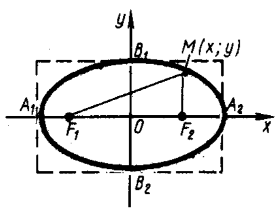
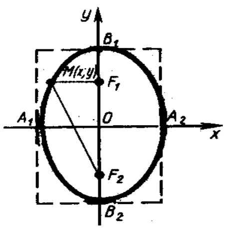
**- канонічне рівняння еліпса**.
*2а* – велика вісь, *2в* – мала вісь, *2с* – фокусна вісь, $A_1,\, A_2,\, B_1, B_2$ - вершини еліпса

-зв'язок між фокусною відстанню та осями еліпса ($a>b$).

**Ексцентриситетом** еліпса називається

**Директрисами** еліпса називаються прямі,

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ - рівняння еліпса із зміщеним центром, $(x_0;\, y_0)$ - центр.

| | | |
|---|---|---|
| |  |  |
| ***Канонічне рівняння*** | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ |
| ***Розташування фокусів***<br>***Координати фокусів***<br>***Співвідношення між a і b***<br>***Велика вісь***<br>***Мала вісь***<br>***Фокусна відстань***<br>***Ексцентриситет***<br>***Співвідношення між a,b,c*** | ***$F_1$ ; $F_2 \in Ox$***<br>***$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$***<br>***a>b***<br>***$\|A_1A_2\|=2a$***<br>***$\|B_1B_2\|=2b$***<br>***$\|F_1F_2\|=2c$***<br>***ε=c/a***<br>***$a^2 - b^2 = c^2$*** | ***$F_1$ ; $F_2 \in Oy$***<br>***$F_1(0;c)$, $F_2(0;-c)$***<br>***a<b***<br>***$\|B_1B_2\|=2b$***<br>***$\|A_1A_2\|=2a$***<br>***$\|F_1F_2\|=2c$***<br>***ε=c/b***<br>***$b^2 - a^2 = c^2$*** |

## 4.9. Гіпербола.

**Гіпербола** – це геометричне місце точок площини

**- канонічне рівняння гіперболи**.

*2а* – дійсна вісь, *2в* – уявна вісь, *2с* – фокусна вісь, $A_1, A_2$ - вершини гіперболи

$a^2+b^2=c^2$ зв'язок між фокусною відстанню та осями гіперболи ( $a>b$ ).

**Ексцентриситетом** гіперболи називається

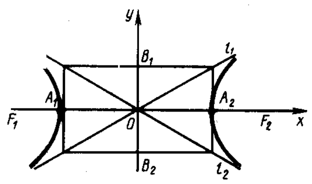
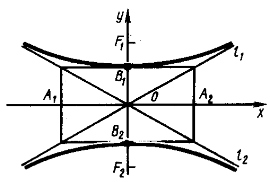
**Директрисами** гіперболи називаються прямі,

Діагоналі прямокутника є асимптотами гіперболи. Асимптоти гіперболи задаються рівняннями: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm kx$

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ - рівняння гіперболи із зміщеним центром, $(x_0;\, y_0)$ - центр.

Якщо $a<b$, то $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

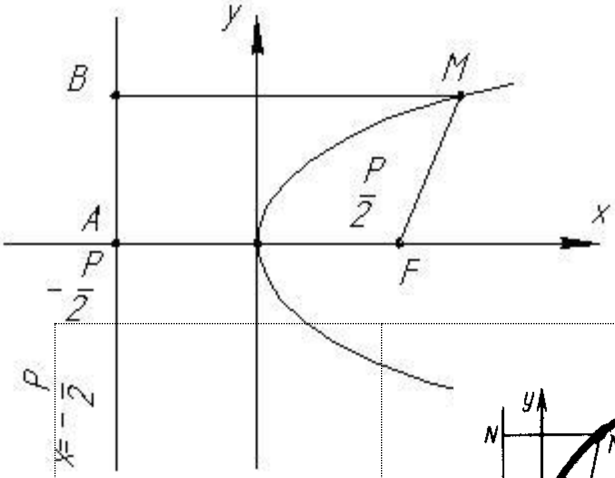
Гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ та $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ називаються спряженими.

| | | |
|---|---|---|
| |  |  |
| ***Канонічне рівняння*** | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ | $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ |
| ***Розташування фокусів***<br>***Координати фокусів***<br>***Дійсна вісь***<br>***Уявна вісь***<br>***Фокусна відстань***<br>***Ексцентриситет***<br>***Співвідношення між a,b,c*** | $F_1;\, F_2 \in Ox$<br>$F_1(-c;0),\, F_2(c;0)$<br>$\lvert A_1A_2\rvert=2a$<br>$\lvert B_1B_2\rvert=2b$<br>$\lvert F_1F_2\rvert=2c$<br>$\varepsilon=c/a$<br>$c^2=a^2+b^2$ | $F_1;\, F_2 \in Oy$<br>$F_1(0;c),\, F_2(0;-c)$<br>$\lvert B_1B_2\rvert=2b$<br>$\lvert A_1A_2\rvert=2a$<br>$\lvert F_1F_2\rvert=2c$<br>$\varepsilon=c/b$<br>$c^2=a^2+b^2$ |

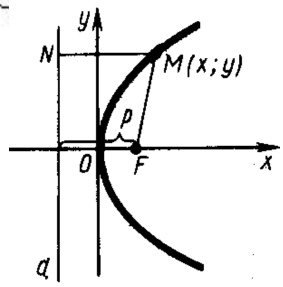
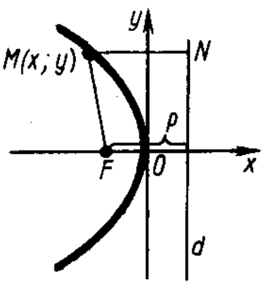
## 4.10. Парабола.

**Парабола** – це

.




**- канонічне рівняння параболи**, симетричної відносно осі Ох.

| | | |
|---|---|---|
| |  |  |
| ***Канонічне рівняння*** | $y^2 = 2px$ | $y^2 = -2px$ |
| ***Розташування фокуса*** | ***На додатній піввісі Ох*** | ***На від'ємній піввісі Ох*** |
| ***Координати фокуса*** | $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ | $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$ |
| **Рівняння директриси** | $x = -\frac{p}{2}$ | $x = \frac{p}{2}$ |