Категорія Т

1. Дослідити збіжність інтеграла:

$$\int_0^\infty \sin(x)\sin(x^2)\,dx.$$

Розв'язання

Сходимость интеграла не меняется, если нижний предел заменить на 1.

$$\int_1^\infty \sin x\cdot\sin x^2\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{2x}\sin x\cdot\sin x^2\,(2x\,dx) = \int_1^\infty \frac{\sin x}{2x}\cdot\sin x^2\,dx^2$$
$$= \begin{Bmatrix} du = \sin x^2\,dx^2, & u = -\cos x^2 \\ V = \dfrac{\sin x}{2x}, & dV = \dfrac{2x\cos x - 2\sin x}{4x^2}dx \end{Bmatrix}$$
$$= -\frac{\sin x}{x}\cos x^2\Big|_1^B + \int_1^B \cos x^2\,\frac{x\cos x - \sin x}{2x^2}\,dx^2$$
$$= \int_1^B \frac{\cos x}{2x}\cos x^2\,dx - \int_1^B \frac{\sin x}{2x^2}\cos x^2\,dx$$

Примечание:

$\frac{\sin x}{x}\cos x^2\Big|_1^B$ – ограничен,

$\int_1^B \frac{\sin x}{2x^2}\cos x^2\,dx$ – сходится абсолютно по признаку сравнения.

$$\int_1^B \frac{\cos x}{2x}\cos x^2\,dx = \int_1^B \frac{\cos x}{4x^2}\cos x^2\,dx^2 = \frac{\cos x}{4x^2}\sin x^2\Big|_1^B - \int_1^\infty -\frac{2\cos x - x\sin x}{4x^3}\sin x^2 dx$$

Примечание:

$\frac{\cos x}{4x^2}\sin x^2\Big|_1^B$ – ограничен,

$\int_1^\infty -\frac{2\cos x - x\sin x}{4x^3}\sin x^2 dx$ – сходится абсолютно по признаку сравнения.

2. Нехай $f(x)$ – двічі неперервно диференційована функція та $f''(x) + xg(x)f'(x) + f(x) = 0$, при цьому $g(x) \geq 0$ для всіх $x \in R$. Довести, що функція $f(x)$ обмежена на всій вісі.

Розв'язання

Умножим на $2f'(x)$:

$$2f'f'' + 2xg(f')^2 + 2ff' = 0$$

или $(f^2 + [f']^2)' = -2xg(f')^2$

Для $x < 0$ правая часть неотрицательная.

Для $x > 0$ правая часть неположительная.

Тогда функция $2f^2 + (f')^2$ – возрастает до своего max при $x = 0$. Значит ограничены f и f'.

3. Частинка рухається з точки A в точку B по прямій, не змінюючи напрямок руху. Відстань $|AB| = 1$, час руху рівний 1, а в початковий і кінцевий моменти руху швидкість дорівнює нулю. Довести, що в деякий момент часу абсолютна величина прискорення частинки дорівнює 4.

Розв'язання

Пусть *v(t)* – скорость частицы в момент времени *t*, $t \in [0,1]$. Тогда $v(0) = v(1) = 0$, $\int_0^{R_1} v(t)\,dt = 1$. В координатах *(t,v)* рассмотрим треугольник *OMN*, где *O*(0,0), *M*(1/2,2), *N*(1,0). График функции *v(t)* пересекается по крайней мере с одной из боковых сторон треугольника *OMN*, т.к. $S_{OMN} = 1$. Следовательно, на графике функции $v = v(t)$ найдется точка $(t_0, v(t_0))$, в которой касательная параллельна боковой стороне треугольника, т.е. $|v^0(t_0)| = 4$.

4. Додатня послідовність $\{a_n\}$ зростає та обмежена. Довести, що $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < +\infty$.

Розв'язання

В силу условий, последовательность a_n сходится к некоторому числу a. Заметим, что $\sum_{n=1}^{m}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln a_2 - \ln a_1 + \ln a_3 - \ln a_2 + \ln a_4 - \ln a_3 + \cdots + \ln a_{m+1} - \ln a_m = \ln a_{m+1} - \ln a_1$.

При $n \to \infty$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln a - \ln a_1$.

Далее имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{a_n}{a_{n+1}}}{\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}} = -\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{a_n}{a_{n+1}}}{\ln\left(1+\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)} = 1$ так как $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$ при $n \to \infty$. Значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ эквивалентен ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}$ и поэтому сходится.

5. Знайти всі функції $f: C \to C$, які задовольняють функціональному рівнянню:

$$f(z) + z\cdot f(1-z) = 1 + z.$$

Розв'язання

$$\begin{cases} f(z) + zf(1-z) = 1+z \\ f(1-z) + (1-z)f(z) = 2-z \end{cases} \Rightarrow (z^2-z+1)f(z) = z^2-z+1.$$

Пусть α и $\bar{\alpha}$ – корни уравнения $z^2 - z + 1 = 0$. Тогда $\alpha + \bar{\alpha} = 1$, $\alpha\bar{\alpha} = 1$ и $f(z) = 1$ $\forall z \neq \alpha, \bar{\alpha}$.

Пусть $f(\alpha) = a$, $f(\bar{\alpha}) = b$. Тогда $\begin{cases} a + \alpha b = 1 + \alpha \\ b + \bar{\alpha}a = 1 + \bar{\alpha} \end{cases} \leftrightarrow b + \bar{\alpha}a = 1 + \bar{\alpha}$.

$$f(z) = \begin{cases} 1, z \neq \alpha, \bar{\alpha}, \\ a, z = \alpha, \text{где } a - \text{произвольное}, \\ 1 + \bar{\alpha}(1-a), z = \bar{\alpha}. \end{cases}$$

6. Відомо, що найбільший кут, під яким еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

може перетинати концентричне коло, дорівнює 45°. Знайти відношення a/b піввісей еліпса.

Розв'язання

Пусть $P(x_0, y_0)$ – точка пересечения эллипса и окружности $x^2 + y^2 = r^2$, лежащие в первой четверти.

Уравнение касательной l_e к эллипсу в точке P имеет вид $\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$, а уравнение касательной l_0 к окружности в P - $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$. Из этих уравнений находим x_0 и y_0: $x_0^2 = \frac{a^2(r^2-b^2)}{a^2-b^2}$, $y_0^2 = \frac{(a^2-r^2)b^2}{a^2-b^2}$.

Угол $\varphi = (\widehat{l_e, l_0}) = (\widehat{n_e, n_0}) = \left(\widehat{\left\{\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right\}, \{x_0, y_0\}}\right)$, где $n_e = \left\{\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right\}$, $n_0 = \{x_0, y_0\}$ – нормали $P(x_0, y_0)$ к эллипсу и окружности соответственно.

$\cos\varphi = \frac{x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2}{\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = \frac{1\cdot ab}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}\cdot r} = f(r)$.

Для нахождения $\min f(r)$ находим решения уравнения $f'(r) = 0$, т.е. решения уравнения $\frac{a^2+b^2-2r^2}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}} = 0$. Отсюда $r = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Тогда $\cos\varphi_0 = \frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2)/2}\sqrt{(a^2+b^2)/2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

По условию $\frac{2ab}{a^2+b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sim \frac{2t}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(t = \frac{a}{b}\right) \Rightarrow t = \sqrt{2} + 1$.

Відповідь: $\frac{a}{b} = \sqrt{2} + 1$.

7. Розв’язати задачу Коші:

$$t^2\ddot{x} + 3t\dot{x} + x = 0,$$
$$x(1) = 0, \dot{x}(1) = 1.$$

Розв’язання

Так как

$$\frac{d}{dt}(t^2\dot{x} + tx) = 2t\dot{x} + t^2\ddot{x} + x + t\dot{x} = t^2\ddot{x} + 3t\dot{x} + x = 0$$

Таким образом, $t^2\dot{x} + tx = C.$

С учётом начальных условий

$$1^2 * 1 + 1 * 0 = \mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C} = 1$$
$$t^2\dot{x} + tx = 1 \Rightarrow \quad \dot{x} + \frac{1}{t}x = \frac{1}{t^2}$$

а) решение однородного

$$x = C \cdot e^{-\ln t} = \frac{C}{t};$$

б) далее метод вариации

Пусть $\dot{x}(t) = \frac{C(t)}{t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{C\prime}{t} - \frac{C}{t^2}$

$\frac{C\prime}{t} - \frac{C}{t^2} + \frac{1}{t} \cdot \frac{C}{t} = \frac{1}{t^2}, C' = \frac{1}{t}$

$$C(t) = \ln t + \tilde{C}$$
$$x = \frac{\ln t + \tilde{C}}{t}; 0 = \frac{\tilde{C}}{1}; \tilde{C} = 0;$$
$$C(t) = \frac{\ln t}{t}$$

или

$$x = \frac{\ln t}{t}.$$