Категорія М

1. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$$

при $n = 2017$, $x = 2$.

Розв'язання

Розкладемо даний визначник Δ_n, де $n = 2017$ по n–му стовпцю.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix} = n(-1)^{1+n} \cdot \begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} + x(-1)^{n+n} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Далі розкладемо перший визначник по першому стовпцю. Другий визначник є ніщо інше як Δ_{n-1}, тобто

$$n(-1)^{1+n} \cdot \begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} + x(-1)^{n+n} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} = n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} + x(-1)^{2n}\Delta_{n-1} = n + x\Delta_{n-1}.$$

При $x = 2$ отримаємо

$$\Delta_n = n + 2\Delta_{n-1} = 2\Delta_{n-1} + n$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Delta_n + n + 2 &= (2\Delta_{n-1} + n) + n + 2 = 2(\Delta_{n-1} + n + 1) = 2(2\Delta_{n-2} + (n-1) + n + 1) \\ &= 2(2\Delta_{n-2} + 2n) = 2^2(\Delta_{n-2} + n) = 2^2(2\Delta_{n-3} + (n-2) + n) \\ &= 2^2(2\Delta_{n-3} + 2n - 2) = 2^3(\Delta_{n-3} + n - 1) = 2^3(2\Delta_{n-4} + (n-3) + n - 1) \\ &= 2^3(2\Delta_{n-4} + 2n - 4) = 2^4(\Delta_{n-4} + n - 2) = \dots = 2^{n-1}\left(\Delta_{n-(n-1)} + n - (n-3)\right) \\ &= 2^{n-1}(\Delta_1 + 3) = 2^{n-1}(1+3) = 2^{n+1} \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\Delta_n = 2^{n+1} - n - 2$$

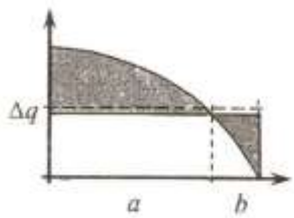
Отже,

$$\Delta_{2017} = 2^{2018} - 2017 - 2 = 2^{2018} - 2019$$

Відповідь: при $x = 2 \cdot \Delta_{2017} = 2^{2018} - 2019$

2. Знайти значення параметра q, при якому інтеграл $\int_0^{\pi/2} |\cos x - q| dx$ приймає найменше значення.

Розв'язання



Значення інтеграла дорівнює сумі площ двох криволінійних трикутників, які обмежені косинусоїдою $y = \cos x$ і прямою $y = q$. Досліджуємо, як змінюється ця сума при зміні q на невелику додатню величину Δq. Ми бачимо, що «ліва» площа зменшилась приблизно на $a\Delta q$, а «права» – збільшилася на $b\Delta q$, в цілому площа зменшиться на $(a-b)\Delta q$. Якщо $a > b$, то площу, яку шукаємо, можна зменшити, збільшуючи q. Аналогічно, якщо $a < b$, її можна зменшити, зменшуючи q. Ми бачимо, сума площ мінімальна, коли $a = b = \pi/4$. Тому найменше значення інтегралу досягається при $q = \cos\pi/4$.

Примітка. В розв'язанні використовується тільки той факт, що косинус – неперервна монотонно спадаюча на заданому проміжку функція.

Відповідь: $q = \sqrt{2}/2$.

3. Відомо, що найбільший кут, під яким еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

може перетинати концентричне коло, дорівнює 45°. Знайти відношення a/b піввісей еліпса.

Розв'язання

Пусть $P(x_0, y_0)$ – точка пересечения эллипса и окружности $x^2 + y^2 = r^2$, лежащие в первой четверти.

Уравнение касательной l_e к эллипсу в точке P имеет вид $\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$, а уравнение касательной l_0 к окружности в P - $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$. Из этих уравнений находим x_0 и y_0: $x_0^2 = \frac{a^2(r^2 - b^2)}{a^2 - b^2}$, $y_0^2 = \frac{(a^2 - r^2)b^2}{a^2 - b^2}$.

Угол $\varphi = \left(\widehat{l_e, l_0}\right) = \left(\widehat{n_e, n_0}\right) = \left(\widehat{\left\{\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right\}, \{x_0, y_0\}}\right)$, где $n_e = \left\{\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right\}$, $n_0 = \{x_0, y_0\}$ – нормали $P(x_0, y_0)$ к эллипсу и окружности соответственно.

$\cos\varphi = \frac{x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2}{\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{1 \cdot ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - r^2} \cdot r} = f(r)$.

Для нахождения $\min f(r)$ находим решения уравнения $f'(r) = 0$, т.е. решения уравнения $\frac{a^2 + b^2 - 2r^2}{\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}} = 0$. Отсюда $r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$. Тогда $\cos\varphi_0 = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + b^2)/2}\sqrt{(a^2 + b^2)/2}} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$.

По условию $\frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sim \frac{2t}{1 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t = \frac{a}{b}\right) \Rightarrow t = \sqrt{2} + 1$.

Відповідь: $\frac{a}{b} = \sqrt{2} + 1$.

4. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – додатні числа. Довести, що многочлен $x^n - a_1 x^{n-1} - \ldots - a_n$ має тільки один додатній корінь.

Розв'язання

Решим функцию $f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$.

На полуоси $(0, +\infty)$ функция $f(x)$ строго убывает от $+\infty$ до 0. Следовательно, существует единственное положительное такое, что $f(x_0) = 1$, т.е.

$$\frac{a_1}{x_0} + \frac{a_2}{x_0^2} + \ldots + \frac{a_n}{x_0^n} = 1.$$

5. Нехай $p(x) = 2x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4x + 2$, $f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{p(x)}$. Знайти: а) множину задання функції f; б) точку мінімуму функції f.

Розв'язання

1) $D(f) = (-1; 5)$

$$2)\ f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{p(x)} = \left[\tau = \frac{1}{x}\right] = -\int_{+\infty}^0 \frac{\tau^6 d\tau}{\tau^{2+\alpha} p(\tau)} = \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{4-\alpha} d\tau}{p(\tau)} \Rightarrow$$

$f(\alpha) = \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(4 - \alpha)) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(x^\alpha + x^{4-\alpha})dx}{p(x)} \geq \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{p(x)} = f(2)$, $\forall\alpha \in (-1; 5)$.

Следовательно, $\alpha = 2$ – точка минимума f.

6. Довести, що функція $f(x) = \frac{a_0}{2} + \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos nx$ при $|a_0| < 1$, приймає як додатні, так і від'ємні значення.

Розв'язання

$$I_{\pm} = \int_0^{2\pi} f(x)(1 \pm \cos x)dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} \pm cos^2 x\right) dx = \pi(a_0 \pm 1)$$

$I_+ > 0, I_- < 0$.

Если $f(x) \geq 0$, то оба интеграла будут ≥ 0 и $f(x) \leq 0$, то оба интеграла будут ≤ 0. Следовательно, функция $f(x)$ принимает значения разных знаков.

7. Нехай $f \in c^{(n+1)}(R)$ та $\ln\left(\frac{f(b)+f'(b)+\ldots+f^n(b)}{f(a)+f'(a)+\ldots+f^n(a)}\right) = b - a$, де $a < b$. Довести, що знайдеться $c \in (a, b)$ таке, що $f^{(n+1)}(c) = f(c)$.

Розв'язання

Пусть $g(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) \Rightarrow g(b) = g(a) \cdot e^{b-a}$.

Функция $h(x) = e^{-x} g(x)$

$$h(b) = e^{-b} g(b)$$
$$h(a) = e^{-a} g(a)$$

и применим к ней теорему Ролля $(h(a) = h(b))$:

$c \in (a, b)$ такое, что $h'(c) = -e^{-c} g(c) + e^{-c} g'(c) = 0 \Rightarrow g'(c) = g(c)$.