Завдання

Провести повне дослідження функції й побудувати графік

Варіант 1

$$y = \frac{4x^3}{x^2 - 9}.$$

Варіант 2

$$y = \frac{x-4}{2(x+1)}.$$

Варіант 3

$$y = 2^{(x+1)}.$$

Варіант 4

$$y = e^{x-6}.$$

Варіант 5

$$y = 3\sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

Варіант 6

$$y = \sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}.$$

Варіант 7

$$y = e^{3-x}.$$

Варіант 8

$$y = e^{2(x-1)}.$$

Варіант 9

$$y = \sqrt[3]{(x^2-2x)^2}.$$

Варіант 10

$$y = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 1}.$$

Варіант 11

$y=\sqrt[3]{(x+4)^2}$.

Варіант 12

$y=\frac{2x^3+1}{x^2}$.

Варіант 13

$y=\frac{3x^4+1}{x^3}$.

Варіант 14

$y=\sqrt[3]{(3-x)^2}$.

Варіант 15

$y=\sqrt[3]{(x-4)^2}$.

Варіант 16

$y=e^{x-3}$.

Варіант 17

$y=-e^{-2(x+2)}$.

Варіант 18

$y=e^{-x^2}$.

Варіант 19

$y=e^{2(4-x)}$.

Варіант 20

$y=4e^{-(x+2)}$.

Варіант 21

$y=\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

Варіант 22

$y=\frac{1}{x^4-1}$

Варіант 23

$$y = \frac{3x-2}{x^3}$$

Варіант 24

$$y = \frac{x^3-4}{x^2+1}.$$

Варіант 25

$$y = \frac{4-x^3}{x^2-9}.$$

Варіант 26

$$y = \sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}.$$

Варіант 27

$$y = \ln^2(x-1).$$

Варіант 28

$$y = e^{-(x+3)}.$$

Варіант 29

$$y = \ln^2(x+4).$$

Варіант 30.

$$y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$$

Приклад розв'язання типового завдання

Провести повне дослідження функції й побудувати графік, якщо $y = \dfrac{2x^3}{x^2-1}$.

I

1. ОДЗ функції: $x \neq \pm 1$ або $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^3}{x^2-1} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^3}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x}{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \pm\infty$,

$$\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{2x^3}{x^2-1}=\frac{2}{\pm 0}=\pm\infty,$$

$$\lim_{x\to -1\pm 0}\frac{2x^3}{x^2-1}=\frac{-2}{\mp 0}=\pm\infty.$$

3. Асимптоти $x=\pm 1$, тому що при $x=\pm 1$ функція $y=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$

зазнає розриву 2-го роду. Визначимо похилі асимптоти

$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3}{x\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=2,$$

$$b_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3}{\left(x^2-1\right)}-k_{1,2}\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-2x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)}=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2}{\pm\infty}=0.$$

Таким чином, рівняння похилої асимптоти $y=2x$ (як при $x\to+\infty$, так і при $x\to-\infty$, але рівняння асимптот можуть бути і різними).

4. Якщо $x=0$, то $y=0$,

якщо $y=0$, то $x^3=0$, тобто $x=0$.

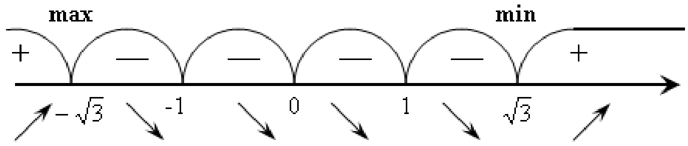
Точка перетину графіка з осями координат $O(0,0)$.

II

$$y'=\frac{\left(2x^3\right)'\left(x^2-1\right)-2x^3\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{6x^2\left(x^2-1\right)-2x^3 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Критичні точки (підозрілі на екстремум) $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$, $x_{4,5}=\pm 1$. Оскільки функція не задана при $x=\pm 1$ (див. ОДЗ), то при $x_{4,5}=\pm 1$ екстремуму не може бути.

Визначимо знаки першої похідної



$$y_{\max} = y(-\sqrt{3}) = \frac{2(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2 - 1} = -\frac{6\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3},$$

$$y_{\min} = y(\sqrt{3}) = \frac{2(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

III

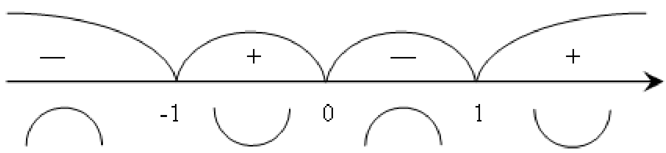
$$y'' = \left(\frac{2x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2} \right)' =$$

$$= \frac{\left(4x\left(x^2-3\right) + 4x^3\right)\left(x^2-1\right)^2 - 2\left(x^2-1\right)2x \cdot 2x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(8x^3-12x\right)\left(x^2-1\right) - 8x^3\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^3} = \frac{4x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Критичні точки (підозрілі на перегин) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$, але точки $x = \pm 1$ не належать ОДЗ. Отже, перегин може бути тільки в точці $x_1 = 0$.

Визначимо знаки другої похідної



$$y_{\text{перегину}} = y(0) = 0.$$

Графік функції: