Категорія С

Задача 1

Знайти n з рівняння:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)(1+\sin 5x)\ldots(1+\sin(4n-3)x)-1}{arctg\, x+arctg\, 2x+\cdots+arctg\, nx}=3.$$

Розв'язання

Застосувати правило Лопіталя та використати формулу для суми арифметичної прогресії. Маємо $n^2-5n=0$.

Відповідь: $n=5$.

Категорія С

Задача 2

Довести, що для будь-яких $x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = 3x^4 - 4x^3 + x^2 - 5x + 6 > 0.$$

Розв'язання

Нехай $f(x) = 3x^4 - 4x^3$, а $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6$.

а) Функція $f(x)$ має нулі в точках $x_1 = 0$ і $x_2 = \frac{4}{3}$, а найменше значення в точці $x = 1$ і при цьому $f(1) = -1$. Таким чином

$$f(x) \geq f(1) = -1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R};$$

$$f(x) > 0 \ \ \forall\, x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{4}{3};\ +\infty\right).$$

б) Функція $\varphi(x)$ має нулі в точках $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, а найменше значення в точці $x = \frac{5}{2}$. Відповідно

$$\varphi(x) \geq \varphi\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4} \ \ \forall\, x \in \mathbb{R};$$

$$\varphi(x) > 0 \ \forall\, x \in (-\infty; 2) \cup (3;\ +\infty).$$

Отже,

$$\forall\, x \in (2; 3)\ P(x) = f(x) + \varphi(x) > f(2) + \varphi\left(\frac{5}{2}\right) = 16 - \frac{1}{4} > 0;$$

$$\forall\, x \in \left(0; \frac{4}{3}\right)\ P(x) = f(x) + \varphi(x) > f(1) + \varphi\left(\frac{4}{3}\right) = -1 + \frac{16}{9} > 0;$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \backslash \left(0; \frac{4}{3}\right) \backslash (2; 3)\ P(x) = f(x) + \varphi(x) > 0.$$

Отже, при будь-яких $x \in \mathbb{R}$ $P(x) > 0$.

Категорія C

Задача 3

Дано вершину $A(3;5)$, рівняння основи $x-2y+12=0$ і площу $S=15$ кв. од. рівнобедренного трикутника ABC. Скласти рівняння його бічних сторін.

Розв'язання

Нехай у трикутнику ABC: $AB=AC$; рівняння сторони CB – $x-2y+12=0$; AD – висота. Складемо рівняння висоти AD. Нормальний вектор сторони CB $\vec{n}=\{A;B\}=\{1;\ -2\}$ є напрямним вектором висоти AD, тобто $\vec{n}=(1;\ -2)$. Координати точки $A(3;5)$ задані за умовою.

Тому

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2},$$

або

$$2x+y-11=0.$$

Знайдемо точку D як точку перетинання прямих AD і CB.

$$\begin{cases} 2x+y=11, \\ x-2y=-12. \end{cases}$$

Маємо $D(2;7)$.

Нехай точка B має координати $(x;y)$. Оскільки ΔABC рівнобедренний, то

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta ABD}=2S_{\Delta ABD}.$$

Тоді

$$S_{\Delta ABC}=2\cdot\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}\right|=15.$$

Можна вважати, що вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AB}$ лежать у площині $z=0$. Тоді

$$\overrightarrow{AD}=\{2-3;7-5;0-0\}=\{-1;2;0\},$$

$$\overrightarrow{AB}=\{x-3;y-5;0-0\}=\{x-3;y-5;0\}.$$

$$\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ x-3 & y-5 & 0 \end{vmatrix}=\vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ x-3 & y-5 \end{vmatrix}=$$

$$=\vec{k}(-y+5-2x+6)=\vec{k}(11-y-2x),$$

$$\left|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}\right|=\left|\vec{k}\right||11-y-2x|=15. \qquad \left(\left|\vec{k}\right|=1\right)$$

Ми одержуємо два рівняння

$$2x+y-11=-15 \text{ і } 2x+y-11=15.$$

тобто

$$2x+y=-4 \text{ і } 2x+y=26.$$

Одне із цих рівнянь зв'язує координати точки B, а друге – координати точки C. Нехай координати точки C зв'язує перше рівняння, а точки B – друге. Оскільки обидві точки належать прямій CB, то їхні координати знайдемо з систем

$$\begin{cases} 2x+y=-4, \\ x-2y=-12; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+y=26, \\ x-2y=-12. \end{cases}$$

Розв'яжемо першу систему, маємо $C(-4;4)$.

Розв'яжемо другу систему, маємо $B(8;10)$.

Тоді рівняння прямої AB

$$\frac{y-5}{10-5}=\frac{x-3}{8-3},$$

$$y-5=x-3, \quad x-y+2=0.$$

Рівняння прямої AC

$$\frac{y-5}{4-5}=\frac{x-3}{-4-3},$$

$$-7y+35=-x+3, \quad x-7y+32=0.$$

Відповідь: $x-y+2=0$, $x-7y+32=0$.

Категорія С

Задача 4

На прямолінійній ділянці річки знаходяться пристані A, B і C (в зазначеному порядку). До пристаней A і B можлива доставка вантажів автомобільним транспортом, а на пристань C – тільки річковим. З пунктів, розташованих поблизу річки до пристаней A і B відправляються автотранспортом вантажі для подальшої відправки на пристань C.

Потрібно знайти області розміщення пунктів вантажовідправників, для яких при доставці на кінцевий пункт C:

а) використання пристаней A і B призводить до однакових витрат;

б) використання пристані A вигідніше, ніж пристані B.

Розв'язання

а) Позначимо через F_1 та F_2 точки розміщення пристаней A і B, через $M = M(x; y)$ – довільний пункт вантажовідправника. Введемо декартову прямокутну систему координат Oxy: на осі Ox розташовані точки F_1 та F_2, вісь Oy проходить через середину відрізка F_1F_2 (див. рис.). Нехай вартість за *1 км* провезення вантажу дорівнює p *грн.* при використанні автотранспорту і q *грн.* – при використанні річкового транспорту.

Тоді $p \cdot |F_1M| + q \cdot |F_1F_2| + q \cdot |F_2C|$ – сумарні транспортні витрати на перевезення вантажу з M в C при використанні пристані A, а $p \cdot |F_2M| + q \cdot |F_2C|$ – з M в C при використанні в якості проміжної пристані B. Рівність

$$p \cdot |F_1M| + q \cdot |F_1F_2| + q \cdot |F_2C| = p \cdot |F_2M| + q \cdot |F_2C| \qquad (*)$$

означає, що сумарні транспортні витрати при використанні пристаней A і B рівні. (*) рівносильне рівності $|F_2M| - |F_1M| = \frac{q}{p} \cdot |F_1F_2|$. Вважаючи в отриманій рівності $2a = \frac{q}{p} \cdot |F_1F_2|$, одержимо рівняння $|F_2M| - |F_1M| = 2a$ лівої вітки гіперболи, фокус F_1 якої знаходиться в точці розташування пристані A.

б) При перевезенні вантажів з M в C використання пристані A вигідніше, ніж B, якщо транспортні витрати задовольняють нерівності

$$p \cdot |F_1M| + q \cdot |F_1F_2| + q \cdot |F_2C| < p \cdot |F_2M| + q \cdot |F_2C|,$$

яка рівносильна нерівності $|F_2M| - |F_1M| > 2a$. Вибравши, наприклад, точку O – початок координат, отримаємо що $0 = |F_1O| + |F_2O| < 2a$. Отже, вказана нерівність описує ту частину площини, якій не належить початок координат, тобто опуклу область, обмежену гілкою гіперболи з фокусами F_1 та F_2.

Відповідь: а) сумарні транспортні витрати рівні при використанні пристаней A і B, якщо пункти вантажовідправників на плані місцевості розташовані в точках лівої гілки гіперболи; б) використання пристані A вигідніше при доставці вантажів з M в C для вантажовідправників, пункти яких на плані місцевості розташовані в точках, що належать опуклій області, обмеженій гілками гіперболи з фокусами F_1 та F_2.

Зауваження: у випадку $p = q$ ліва гілка гіперболи вироджується в промінь для відповіді достатньо скористатися нерівністю трикутника.

Задача 5

Обчислити визначник n-го порядку матриці $A = [a_{ij}]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & i \neq j, \\ 2, & i = j. \end{cases}$$

Розв'язання

Додамо другий рядок до першого, третій рядок до другого, …, n-ий рядок до $(n-1)$-й, отримаємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & +1 & ... & \pm1 & \mp1 \\ -1 & 2 & -1 & ... & \mp1 & \pm1 \\ +1 & -1 & 2 & ... & \pm1 & \mp1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mp1 & \pm1 & \mp1 & ... & 2 & -1 \\ \pm1 & \mp1 & \pm1 & ... & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 \\ \pm1 & \mp1 & \pm1 & \mp1 & ... & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Тепер віднімемо перший стовпчик від другого. Потім віднімемо отриманий другий стовпчик від третього, …, і нарешті, $(n-1)$-й стовпчик від n-го. В результаті отримаємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & n+1 \end{vmatrix} = n+1.$$

Категорія C

Задача 6

Нехай $P(x)$ – многочлен 4-степеня, при цьому $P(2) = -1$, $P'(2) = 0$, $P''(2) = 2$, $P'''(2) = -12$, $P^{IV}(2) = 24$. Обчислити: $P(-1)$, $P'(0)$, $P''(1)$.

Розв'язання

Многочлен $P(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора:

$$P(x) = -1 + \frac{0}{1!}(x-2) + \frac{2}{2!}(x-2)^2 - \frac{12}{3!}(x-2)^3 + \frac{24}{4!}(x-2)^4 =$$
$$= -1 + (x-2)^2 - 2(x-2)^3 + (x-2)^4.$$

Тоді $P(-1) = 143$, $P'(0) = -60$, $P''(1) = 26$.

Категорія С

Задача 7

Матриці A і B мають розмірність $[4 \times 2]$ і $[2 \times 4]$ відповідно, такі, що $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти BA.

Розв'язання

Представивши A і B у вигляді блочних матриць $A = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)$ і $B = (B_1|B_2)$, маємо

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A_1B_1 = A_2B_2 = E, \qquad A_1 = {B_1}^{-1}, A_2 = {B_2}^{-1},$$
$$A_2B_1 = A_1B_2 = -E, \qquad A_2 = -{B_1}^{-1}, A_1 = {B_2}^{-1}.$$
$$BA = (B_1|B_2)\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = B_1A_1 + B_2A_2 = E + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.