

Лекція 9. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

План

1. Первісна та невизначений інтеграл.
2. Основні властивості невизначеного інтеграла.
3. Таблиця невизначених інтегралів.
4. Методи знаходження невизначених інтегралів.

9.1. Первісна та невизначений інтеграл.

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо на цьому проміжку $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = f(x)dx$.

Із означення виходить, що первісна $F(x)$ — диференційовна, а значить неперервна функція на проміжку $(a;b)$, і її вигляд суттєво залежить від проміжку, на якому вона розглядається.

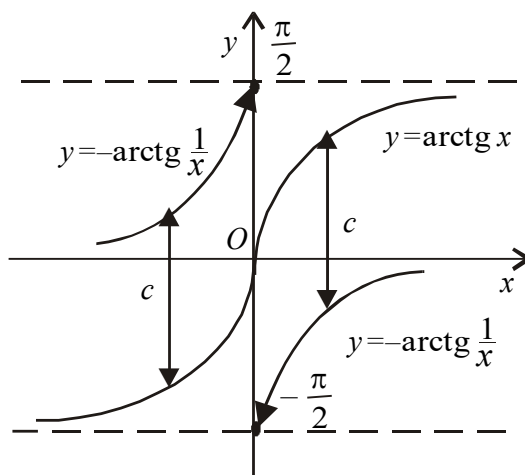
Приклад. Первісні для функції $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ мають вигляд:

$$F_1(x) = \operatorname{arctg} x, \text{ бо } F_1'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$F_2(x) = \operatorname{arctg} x + C, \text{ бо } F_2'(x) = (\operatorname{arctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$F_3(x) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \text{ бо } F_3'(x) = \left(-\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty),$$

причому $F_1(x), F_2(x)$ — неперервні $\forall x \in \mathbb{R}$, а $F_3(x)$ у точці $x = 0$ має розрив.



У цьому прикладі первісні $F_1(x), F_2(x), F_3(x)$ знайдені методом добору із наступною перевіркою, з використанням таблиці похідних функцій.

Теорема . Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, то:

- $F(x) + C$ — також первісна для $f(x)$ на проміжку $(a;b)$;

- будь-яка первісна $\Phi(x)$ для $f(x)$ може бути подана у вигляді $\Phi(x) = F(x) + C$ на проміжку $(a;b)$. (Тут $C = \text{const}$ називається довільною сталою.)

Наслідок. Дві будь-які первісні для однієї й тієї самої функції на проміжку $(a;b)$ відрізняються між собою на сталу величину.

Операція знаходження первісних для функції $f(x)$ називається **інтегруванням** функції $f(x)$. Задача інтегрування функції на проміжку полягає у тому, щоб знайти всі первісні функції на цьому проміжку, або довести, що функція не має первісних на цьому проміжку. Для розв'язування задачі інтегрування функції достатньо знайти одну будь-яку первісну на розглядуваному проміжку, наприклад $F(x)$, тоді (за теоремою про множину первісних) $F(x) + C$ — загальний вигляд всієї множини первісних на цьому проміжку.

Означення. Функція $F(x) + C$, що являє собою загальний вигляд всієї множини первісних для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, називається **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$ і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (F'(x) = f(x)),$$

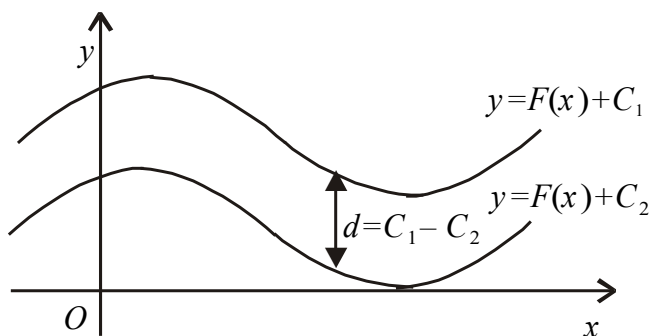
де $\int$ — знак невизначеного інтеграла;

$f(x)$ — підінтегральна функція;

$f(x)dx$ — підінтегральний вираз;

dx — диференціал змінної інтегрування.

Геометричний зміст невизначеного інтеграла полягає в тому, що функція $y = F(x) + C$ є рівняння сім'ї кривих, які утворюються одна з одної паралельним перенесенням уздовж осі ординат.



Теорема (теорема Коші). Для існування невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ на певному проміжку достатньо, щоб $f(x)$ була неперервною на цьому проміжку.

Зауваження. Виявляється, є такі невизначені інтеграли від елементарних функцій, які через елементарні функції не виражаються, наприклад:

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x}, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \cos x^2 dx$$

існують у кожному із проміжків області визначення, але записати їх через основні елементарні функції не можна; в такому розумінні ці інтеграли називають «неінтегровними».

9.2. Основні властивості невизначеного інтеграла.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x);$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d \int f(x) dx = f(x);$$

3. Сталій множник, що не дорівнює нулю, можна виносити з-під знака інтеграла, тобто:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx, \quad k \neq 0$$

4. Невизначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій, якщо вони існують, тобто

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

9.3. Таблица основних інтегралів

$$1. \int 0 \cdot dx = C; \quad 2. \int dx = x + C; \quad 3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \quad 5. \int e^x dx = e^x + C; \quad 6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \neq 1;$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad 8. \int \cos x dx = \sin x + C; \quad 9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad 11. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C; \quad 12. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$13. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C; \quad 14. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C;$$

$$17. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C;$$

$$18. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$19. \int \frac{x dx}{x^2+a} = \frac{1}{2} \ln|x^2+a| + C;$$

$$20. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0;$$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C.$$

9.4 Методи знаходження невизначених інтегралів

9.4.1. Метод безпосереднього інтегрування.

При безпосередньому інтегруванні використовується таблиця невизначених інтегралів $\int f(u)du = F(u) + C$, $\varphi(x) = ax + b$, $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} \int f(u) \cdot d(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$..

Приклад.

$$\int \frac{1 \cdot dx}{x^2(1+x^2)} = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C.$$

9.4.2. Інтегрування розкладанням.

Мета методу — розкласти підінтегральну функцію на такі доданки, інтеграли від яких відомі або їх простіше інтегрувати, ніж початкову підінтегральну функцію.

Приклад.

$$\int \frac{1 \cdot dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C.$$

9.4.3. Метод підстановки (заміна змінної інтегрування).

Мета методу підстановки — перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

Теорема. Якщо $f(x)$ — неперервна функція, а функція $x = \varphi(t)$ має неперервну похідну, то:

$$\int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt; \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Наслідок. $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = |\varphi(x) = t| = \int f(t) dt.$

Зауваження. Специфіка інтегрування невизначеного інтеграла не залежить від того, є змінна інтегрування незалежною змінною чи сама є функцією (на підставі інваріантності форми запису першого диференціалу), тому, наприклад:

$$\begin{aligned} \left(\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right) &\Rightarrow \left(\int (u(x))^\alpha du(x) = \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\int (\operatorname{tg} x)^\alpha d(\operatorname{tg} x) = \frac{(\operatorname{tg} x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C. \right) \end{aligned}$$

У такому розумінні слід розглядати і всю таблицю інтегралів.

Приклад.

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

Для деяких класів підінтегральних функцій розроблено стандартні заміни, а вибір зручної підстановки визначається знанням стандартних підстановок та досвідом.

9.4.4. Метод інтегрування частинами.

Теорема. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні, то:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

На практиці функції $u(x)$ та $v(x)$ рекомендується вибирати за таким **правилом**: при інтегруванні частинами підінтегральний вираз $f(x)dx$ розбивають на два множники типу $u \cdot dv$, тобто $f(x)dx = u \cdot dv$; при цьому функція $u(x)$ вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за dv беруть залишок підінтегрального виразу, який містить dx , інтеграл від якого відомий, або може бути просто знайдений.

Приклад.

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Іноколи доводиться інтегрування частинами застосовувати кілька разів, що ілюструє такий приклад.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2, du = 2x dx; \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx; \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right) = \\ &= e^{3x} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9} x + \frac{2}{27} \right) + C. \end{aligned}$$

Далі наведено деякі типи інтегралів, при інтегруванні яких застосовують метод інтегрування частинами та показано вибір функцій $u(x)$ та $v(x)$:

$$\int \frac{P(x)}{u} \cdot \frac{\sin(ax) dx}{dv}; \int \frac{P(x)}{u} \cdot \frac{\cos(ax) dx}{dv}; \int \frac{P(x)}{u} \cdot \frac{e^{ax} dx}{dv}; \int \frac{\ln(ax)}{u} \cdot \frac{Q(x) dx}{dv}; \int \frac{\arctg x}{u} \cdot \frac{Q(x) dx}{dv}; \int \frac{\arcsin(ax)}{u} \cdot \frac{Q(x) dx}{dv},$$

де $P(x)$ — многочлен, $Q(x)$ — алгебраїчна функція, $a \in R$.

Звичайно, не слід думати, що метод інтегрування частинами обмежується застосуванням тільки до інтегралів указанного типу. У деяких випадках після інтегрування частинами інтеграла одержується рівняння, із якого знаходять шуканий інтеграл.

Приклад.

$$\begin{aligned} G = \int e^x \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} \cos x = u, \quad du = -\sin x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| = \\ &= e^x \cos x - \int -\sin x \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = u, \quad du = \cos x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| = \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x) - G. \end{aligned}$$

Отже, дістали рівняння $G = e^x (\cos x + \sin x) - G$, із якого знаходимо $G = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C$.

9.4.5. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен.

1. Розглянемо інтегрування інтеграла вигляду: $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$.

Даний інтеграл шляхом виділення повного квадрата у знаменнику можна звести до знаходження інтегралів більш простого виду:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)}$$

Позначимо: $k^2 = \left| \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right|$ і $t = x + \frac{b}{2a}$.

Тоді інтеграл набирає вигляду:

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2} = \begin{cases} \frac{1}{2ak} \ln \left| \frac{t-k}{t+k} \right| + C = \frac{1}{2ak} \ln \left| \frac{x + \frac{b}{2a} - k}{x + \frac{b}{2a} + k} \right| + C, D > 0; \\ \frac{1}{ak} \operatorname{arctg} \frac{t}{k} + C = \frac{1}{ak} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{b}{2a}}{k} + C, D < 0; \\ -\frac{1}{at} + C = -\frac{1}{a(x + \frac{b}{2a})} + C, D = 0. \end{cases}$$

Приклад.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8} = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4 + 4} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 4} = \int \frac{dx}{2^2 + (x-2)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + C$$

2. Розглянемо інтегрування інтеграла

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx &= \int \frac{Ax+B}{a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right)} dx = \left| k^2 = \left| \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right|, x + \frac{b}{2a} = t \right| = \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{A \left(t - \frac{b}{2a} \right) + B}{t^2 \pm k^2} dt = \frac{A}{2a} \int \frac{2tdt}{t^2 \pm k^2} + \frac{2aB - A \cdot b}{2a^2} \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2} = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{d(t^2 \pm k^2)}{t^2 \pm k^2} + \frac{2aB - Ab}{2a^2} \cdot I = \frac{A}{2a} \ln \left| x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right| + \frac{2aB - A \cdot b}{2a^2} \cdot I. \end{aligned}$$

Інтеграл I залежно від знака дискримінанта $D = b^2 - 4ac$ буде таким:

$$I = \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2} = \begin{cases} \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{t-k}{t+k} \right| + C = \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{x + \frac{b}{2a} - k}{x + \frac{b}{2a} + k} \right| + C, D > 0; \\ \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{t}{k} + C = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{b}{2a}}{k} + C, D < 0; \\ -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x + \frac{b}{2a}} + C, D = 0. \end{cases}$$

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17} dx &= \int \frac{3x-1}{4\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(3x-1)dx}{x^2-2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{17}{4}} = \frac{1}{4} \int \frac{(3x-1)dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 4} = \left| \begin{array}{l} x - \frac{1}{2} = t; dx = dt \\ x = t + \frac{1}{2}; \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{3t + \frac{3}{2} - 1}{t^2 + 4} dt = \frac{3}{4} \int \frac{tdt}{t^2 + 4} + \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \\ &= \frac{3}{8} \ln(t^2 + 4) + \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{3}{8} \ln\left(x^2 - x + \frac{17}{4}\right) + \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{2} + C = \\ &= \frac{3}{8} \ln\left(\frac{4x^2 - 4x + 17}{4}\right) + \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{4} + C. \end{aligned}$$

3. Інтеграли виду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ можна за допомогою підстановки $t = x + \frac{b}{2a}$

привести до інтегралу вигляду $\int \frac{dt}{\sqrt{a(t^2 \pm k^2)}}$.

При цьому для $a > 0$ маємо:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a(t^2 \pm k^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| t + \sqrt{t^2 \pm k^2} \right| + C$$

Якщо $a < 0$:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{|a|(k^2 - t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{t}{k} + C$$

Приклад:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 3x + 8}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-0.3)^2 + 1.51}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| (x-0.3) + \sqrt{(x-0.3)^2 + 1.51} \right| + C$$

4. Розглянемо $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$. Аналогічно попередньому можна показати:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{A}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Приклад:

$$\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{-(x^2-2x+1-6)}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{(8t-3)}{\sqrt{6-t^2}} dt = 4 \int \frac{2tdt}{\sqrt{6-t^2}} - 3 \int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{6})^2-t^2}} =$$

$$= -4 \int \frac{d(6-t^2)}{\sqrt{6-t^2}} - 3 \arcsin \frac{t}{\sqrt{6}} + C = -8\sqrt{6-t^2} - 3 \arcsin \frac{t}{\sqrt{6}} + C =$$

$$= -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + C.$$

5. Розглянемо $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. За допомогою підстановки

$$t = \frac{1}{mx+n} \quad \text{та} \quad mx+n = \frac{1}{t} \quad \text{можна отримати} \quad x = \frac{1-nt}{mt}; \quad m dx = -\frac{1}{t^2} dt; \quad dx = -\frac{1}{mt^2} dt, \quad \text{що}$$

дасть змогу звести інтеграл до раніше розглянутих.

6. Розглянемо $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} dx$

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} dx = \frac{A}{2a(n-1)} (ax^2+bx+c)^{1-n} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

9.4.6. Інтегрування раціональних функцій.

Означення. Відношення двох многочленів $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається раціональним дробом.

Означення. Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається правильним, якщо степінь многочлена в чисельнику менший від степеня многочлена в знаменнику, тобто $n < m$; якщо $n \geq m$, то дріб називається неправильним.

Теорема. Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу.

Означення. За домовленістю найпростішими раціональними дробами називаються такі дробі чотирьох типів:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}; \quad \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \quad \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad \text{де}$$

$$k \geq 2, k \in N, D = p^2 - 4q < 0$$

Інтеграли від вказаних дробів мають вигляд:

$$\text{I. } \int \frac{Adx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C;$$

$$\text{II. } \int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C;$$

$$\text{III. } \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx \quad \text{— розглянуто в попередньому пункті;}$$

$$\text{IV. } \int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^k} \quad \text{— інтегрується за допомогою рекурентних формул.}$$

Теорема. Будь-який правильний раціональний нескоротний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($n < m$) можна подати у вигляді скінченної кількості найпростіших дробів, використовуючи такі правила:

1). Якщо $Q_m(x) = (x-a)^k \cdot g_{m-k}(x)$, то:

$$\frac{P_n(x)}{(x-a)^k g_{m-k}(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{r(x)}{g_{m-k}(x)};$$

2). Якщо $Q_m(x) = (x^2+px+q)^k \cdot g_{m-2k}(x)$, то :

$$\frac{P_n(x)}{(x^2 + px + q)^k \cdot g_{m-k}(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{A_k x + B_k}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)},$$

де $A_i, B_i, i = \overline{1, k}$ — деякі коефіцієнти, $\frac{r(x)}{g_{m-k}(x)}$ та $\frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)}$ — правильні раціональні дробу.

Методика інтегрування раціональних функцій:

- якщо підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу;
- знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів;
- інтегрують цілу частину та найпростіші дробу.

Приклад. Знайти $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 8}{x^4 - 4x^2} dx$

Степінь чисельника менше ніж степінь знаменника, тому підінтегральна функція є правильним раціональним дробом.

Тоді:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 8}{x^4 - 4x^2} = \frac{x^3 + 2x^2 + 8}{x^2(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

Зводимо до спільного знаменника праву частину і знаменники не розглядаємо.

$$x^3 + 2x^2 + 8 = A(x-2)(x+2) + Bx(x-2)(x+2) + Cx^2(x+2) + Dx^2(x-2).$$

У правій частині розкриємо дужки та згрупуємо за степенями x .

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + 8 &= Ax^2 - 4A + Bx^3 - 4Bx + Cx^3 + 2Cx^2 + Dx^3 - 2Dx^2 = \\ &= (B+C+D)x^3 + (A+2C-2D)x^2 - 4Bx - 4A. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , отримаємо систему:

$$\begin{cases} B+C+D=1; \\ A+2C-2D=2; \\ -4B=0; \\ -4A=8; \end{cases} \quad A=-2; \quad B=0; \quad \begin{cases} C+D=1; \\ 2C-2D=4; \end{cases} \quad C=\frac{3}{2}; \quad D=-\frac{1}{2}.$$

Отже,
$$\frac{x^3+2x^2+8}{x^4-4x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{2(x-2)} - \frac{1}{2(x+2)}.$$

Тоді:

$$\int \frac{x^3+2x^2+8}{x^4-4x^2} dx = \int \left(-\frac{2}{x^2}\right) dx + \int \frac{3dx}{2(x-2)} - \int \frac{dx}{2(x+2)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{2} \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln|x+2| + C$$

Приклад Знайти
$$\int \frac{x^4+2x}{x^3+8} dx$$

Степінь чисельника більше ніж степінь знаменника, тому підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом.

Тоді поділемо чисельник на знаменник:

$$\frac{x^4+2x}{x^3+8} = x - \frac{6x}{x^3+8}$$

Далі:

$$\begin{aligned} \frac{6x}{x^3+8} &= \frac{6x}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} = \\ &= \frac{A(x^2-2x+4) + (Bx+C)(x+2)}{x^3+8} \Rightarrow 6x = A(x^2-2x+4) + (Bx+C)(x+2) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 6x = x^2(A+B) + x(-2A+2B+C) + 4A+2C;$$

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B+C=6 \\ 4A+2C=0 \end{cases} \quad . \quad \text{Звідки: } A=-1, B=1, C=2$$

Тоді:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 + 2x}{x^3 + 8} dx &= \int \left(x + \frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x^2 - 2x + 4} \right) dx = \int x dx + \int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{x+2}{x^2 - 2x + 4} dx = \\
&= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int \frac{(x+2)dx}{(x-1)^2 + 3} = \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \\ x=t+1 \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int \frac{t+3}{t^2+3} dt = \\
&= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int \frac{tdt}{t^2+3} - 3 \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln(t^2+3) - \\
&\quad - \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + C = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \ln \sqrt{x^2 - 2x + 4} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

9.4 7. Інтегрування тригонометричних функцій.

Розглянемо $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де R — раціональна функція відносно $\sin x$, $\cos x$, тобто над $\sin x$, $\cos x$ виконуються лише арифметичні дії та піднесення до цілого степеня, наприклад:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{2 \sin^2 x + \cos^3 x}{3 \sin^4 x - 4 \sin x \cos^2 x}$$

Існують такі підстановки, що за їх допомогою інтеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$ завжди може бути зведений до інтеграла від раціональної функції $\int R^*(t) dt$, інтегрування якої розроблено.

I. Універсальна тригонометрична підстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \\
\int R(\sin x, \cos x) dx &= \left| \begin{array}{l} \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \\ \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int R \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R^*(t) dt.
\end{aligned}$$

Приклад.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, x = 2 \operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(1+t^2)2dt}{2t(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

Зауваження. На практиці універсальну тригонометричну підстановку використовують, якщо $\sin x$, $\cos x$ входять $R(\sin x, \cos x)$ у невисокому степені (інакше розрахунки будуть дуже складні).

II. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ — непарна відносно $\sin x$, тоді роблять підстановку $\cos x = t$.

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^2} (-dt) = \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C \end{aligned}$$

III. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ — непарна відносно $\cos x$ раціоналізується за допомогою підстановки $\sin x = t$.

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \sin^2 x dx &= \\ &= \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \\ &= \int (1-t^2) t^2 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C \end{aligned}$$

IV. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ — парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ разом, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

У цьому випадку використовують підстановку $\operatorname{tg} x = t$ або $\operatorname{ctg} x = t$.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}; \\ \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}; \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

Приклад.

$$= \int \frac{(1+t^2)^2 (1+t^2) dt}{t^4 (1+t^2)} = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1 \right) dt =$$

$$= \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} - 2\operatorname{ctg} x + C$$

V. Підінтегральна функція $R(\operatorname{tg} x)$ раціоналізується підстановкою $\operatorname{tg} x = t$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^3 dt}{t^2 + 1} = \left| \begin{array}{l} t^3 \\ \frac{t^2 + 1}{t} \end{array} \right| =$$

Приклад.

$$= \int \left(t - \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + C = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1} + C$$

Зауваження. В інтегралах $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x dx$ рекомендується скористатись формулами зниження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Приклад.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C.$$

Зауваження. При інтегруванні інтегралів типу: $\int \sin(ax) \cdot \cos(bx) dx$, $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx$, $\int \sin(ax) \cdot \sin(bx) dx$, $a \neq b$ треба скористатися формулами:

$$\sin(ax) \cdot \cos(bx) = \frac{1}{2} (\sin(a+b)x + \sin(a-b)x),$$

$$\cos(ax) \cos(bx) = \frac{1}{2} (\cos(a+b)x + \cos(a-b)x),$$

$$\sin(ax) \cdot \sin(bx) = \frac{1}{2} (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x).$$

Приклад.

$$\int \cos 2x \cdot \sin 5x \cdot dx = \frac{1}{2} \int (\sin 7x + \sin 3x) dx = -\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{6} \cos 3x + C$$

9.4.8. Інтегрування ірраціональних функцій.

Розглянемо підстановки для інтегрування деяких типів ірраціональних функцій, при цьому символ $R(x; y)$ означає раціональну залежність від змінних x та y .

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\right) dx = \left| \begin{array}{l} ax+b=t^n \\ x=\frac{1}{a}(t^n-b) \\ dx=\frac{n}{a}t^{n-1}dt \end{array} \right| = \int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right) \frac{nt^{n-1}dt}{a} = \int R^*(t)dt.$$

I.

Приклад.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \left| \begin{array}{l} x+1=t^3 \\ x=t^3-1 \\ dx=3t^2 dt \end{array} \right| = \int \frac{(t^3-1)3t^2 dt}{t^2} = 3 \int (t^3-1) dt =$$

$$\frac{3}{4}t^4 - 3t + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} - 3\sqrt{x+1} + C.$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right) dx = \left| \frac{ax+b}{cx+d} = t^n \right| = \int R^*(t)dt$$

II.

Приклад.

$$\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^2, x+1=t^2(x-1), \\ x=\frac{t^2+1}{t^2-1}; dx=\frac{-4tdt}{(t^2-1)^2} \end{array} \right| = \int \frac{(t^2-1)^2 t(-4t)dt}{(t^2+1)^2 (t^2-1)^2} =$$

$$= 2 \int \frac{t \cdot (-2t)dt}{(t^2+1)^2} = \left| \begin{array}{l} u=t, du=dt; \\ \frac{-2tdt}{(t^2+1)^2} = dv \Rightarrow v = \frac{1}{t^2+1} \end{array} \right| = \frac{2t}{t^2+1} - 2 \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2t}{t^2+1} - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{x+1}{x-1}} - 2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C = \\
&= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - 2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C.
\end{aligned}$$

III.

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx = \left| \frac{ax+b}{cx+d} = t^s, \right.$$

$$s = HCK(n_1, n_2, \dots, n_k) \Big| = \int R^*(t) dt.$$

Приклад.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^{12}, 12 = HCK(2, 3, 4) \\ dx = 12t^{11} dt; t = \sqrt[12]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11} dt}{t^8 - t^3} = \\
&= 12 \int \frac{t^{14} dt}{t^5 - 1} = 12 \int \frac{t^4(t^{10} - 1 + 1) dt}{t^5 - 1} = 12 \int \left(t^4(t^5 + 1) + \frac{t^4}{t^5 - 1} \right) dt = \\
&= 12 \left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5} \ln |t^5 - 1| \right) + C = \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + \frac{12}{5} \cdot \sqrt[12]{x^5} + \frac{12}{5} \ln |\sqrt[12]{x} - 1| + C
\end{aligned}$$

Підінтегральна функція $R_1(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ після виділення повного квадрата і

заміни $x + \frac{b}{2a} = t$ раціоналізується тригонометричними підстановками; при цьому, залежно від знака дискримінанта квадратного тричлена та знака коефіцієнта a можливі такі випадки:

IV.

$$\begin{aligned}
&\int R(t, \sqrt{k^2 - t^2}) dt = \left| \begin{array}{l} t = k \sin z \\ \text{або} \\ t = k \cos z \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} t = k \sin z, z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), z = \arcsin \frac{t}{k}, \\ dt = k \cos z dz, \sqrt{k^2 - t^2} = \sqrt{k^2 - k^2 \sin^2 z} = \\ = k \sqrt{\cos^2 z} = k |\cos z| = k \cos z \end{array} \right| = \\
&= \int R(k \sin z, k \cos z) k \cos z dz = \int R^*(\sin z, \cos z) dz.
\end{aligned}$$

$$\text{V.} \quad \int R\left(t, \sqrt{t^2 - k^2}\right) dt = \left| \begin{array}{l} t = \frac{k}{\sin z} \\ \text{або} \\ t = \frac{k}{\cos z} \end{array} \right| = \int R^*(\sin z, \cos z) dz.$$

$$\text{VI.} \quad \int R\left(t, \sqrt{k^2 + t^2}\right) dt = \left| \begin{array}{l} t = k \operatorname{tg} z \\ \text{або} \\ t = k \operatorname{ctg} z \end{array} \right| = \int R^*(\sin z, \cos z) dz.$$

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 25}} &= \left| \begin{array}{l} x = 5 \operatorname{tg} z, \quad z \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad z \neq 0, \\ dx = \frac{5dz}{\cos^2 z}; \quad z = \operatorname{arctg} \frac{x}{5}; \\ \sqrt{x^2 + 25} = 5\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z} = \frac{5}{\cos z} \end{array} \right| = \int \frac{\cos z \cdot 5dz}{5 \cdot 25 \operatorname{tg}^2 z \cdot \cos^2 z} = \\ &= \frac{1}{25} \int \frac{\cos z dz}{\sin^2 z} = -\frac{1}{25 \sin z} + C = -\frac{1}{25 \sin \operatorname{arctg} \frac{x}{5}} + C = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{25x} + C. \end{aligned}$$

Зауваження. Інтеграли типу $\int R_1\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ можуть бути проінтегровані за допомогою підстановок Ейлера:

$$\text{VII.} \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}, \text{ при } a > 0;$$

$$\text{VIII.} \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}, \text{ при } c > 0;$$

$$\text{IX.} \quad \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1), \text{ при } b^2 - 4ac > 0,$$

де x_1, x_2 — корені тричлена $ax^2 + bx + c$.

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= \left. \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + x + 1} = t - x, \quad a = 1 > 0; \\ x + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2, \\ x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1}, \quad dx = \frac{2(t^2 + t + 1)dt}{(2t + 1)^2} \end{array} \right| = 2 \int \frac{(t^2 + t + 1)dt}{(x + t - x)(2t + 1)^2} = \\ &= \int \frac{t^2 + t + 1}{t(2t + 1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2t + 1} + \frac{C}{(2t + 1)^2} \Rightarrow t^2 + t + 1 = A(2t + 1)^2 + Bt(2t + 1) + C \cdot t \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ C = -\frac{3}{2} \\ B = -\frac{3}{2} \end{cases} = 2 \int \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2t + 1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(2t + 1)^2} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \frac{t^4}{|2t + 1|^3} + \frac{3}{2(2t + 1)} + C, \end{aligned}$$

де $t = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Контрольні запитання.

1. Що називається первісною та невизначеним інтегралом?
2. Які властивості невизначеного інтеграла відомі?
3. Запишіть первісні основних елементарних функцій.
4. Які методи знаходження невизначених інтегралів існують? Поясніть їх застосування на прикладах. Які випадки інтегрування функцій, що містять квадратичний тричлен можна вказати? Наведіть приклади знаходження інтегралів.
5. Які раціональні дроби відносяться до правильних і неправильних? Наведіть приклади.
6. В чому сутність методу невизначених коефіцієнтів? Наведіть приклади.
7. Які випадки інтегрування тригонометричних функцій можна вказати? Наведіть приклади знаходження інтегралів.
8. Які випадки інтегрування ірраціональних функцій можна вказати? Наведіть приклади знаходження інтегралів.