Лекція 7. Диференціювання функції

План

7.1. Означення похідної. Геометричний та механічний зміст.
1. Означення похідної.
2. Механічний зміст похідної.
3. Геометричний зміст похідної.
4. Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції в певній точці.

7.2. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних основних елементарних функцій.
1. Основні правила диференціювання.
2. Похідні від основних елементарних функцій.
3. Логарифмічне диференціювання.
4. Диференціювання функцій заданих неявно.
5. Диференціювання функцій заданих параметрично.

7.3. Диференціал функції та його застосування.
1. Означення диференціалу функції.
2. Правила знаходження диференціала.
3. Застосування диференціала.

7.4 Застосування похідної для дослідження властивостей функцій
1. Зростання та спадання функцій .
2. Екстремуми функцій.
3. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.
4. Опуклість і вгнутість кривої. Точка перегину.
5. Алгоритм дослідження функції та побудови графіка.

7.1. Означення похідної. Геометричний та механічний зміст.

7.1.1. Означення похідної.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку (*a*; *b*). Візьмемо значення $x \in (a;b)$ і надамо аргументу приросту Δx. Тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Розглянемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Якщо границя відношення існує і скінченна, вона називається **похідною** функції $y = f(x)$ за змінною x і позначається

$$y',\ y'_x,\ \frac{dy}{dx},\ f'(x),\ \frac{df(x)}{dx}$$

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ за аргументом x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Операція знаходження похідної називається **диференціюванням** цієї функції.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається диференційовною на інтервалі $(a; b)$, якщо вона диференційовна в кожній точці даного інтервалу.

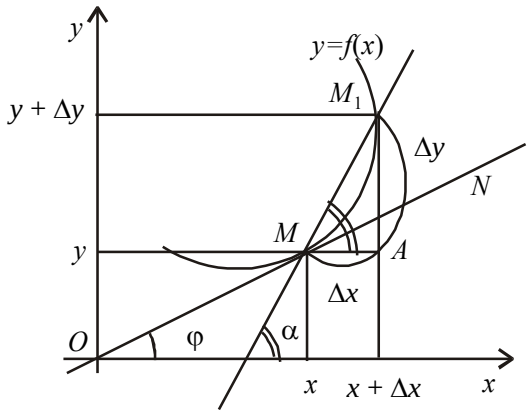
7.1.2. Механічний зміст похідної.

Якщо закон прямолінійного руху точки заданий рівнянням $s = s(t)$, де s – шлях, t – час, то миттєва швидкість руху в момент часу t визначається рівністю:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t) = s',$$

тобто швидкість точки при прямолінійному русі в момент часу t є похідною від шляху s.

7.1.3. Геометричний зміст похідної.



Нехай крива, задана рівнянням $y = f(x)$, має дотичну в точці $M(x, y)$. Позначимо кутовий коефіцієнт дотичної MN через $k = \operatorname{tg}\varphi$. Надамо в точці x приросту Δx, тоді ордината y набуде приросту Δy.

З ΔMAM_1 випливає, що $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$.

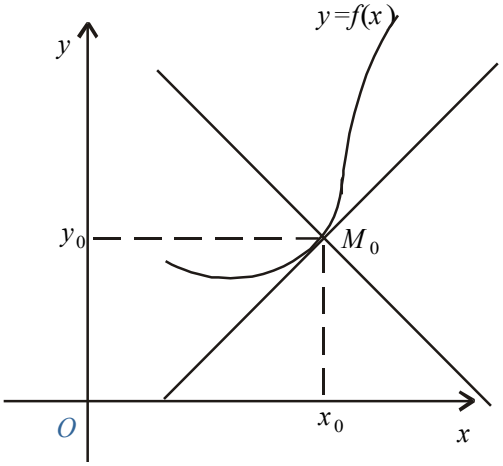
Коли $\Delta x \to 0$, то $M_1 \to M$, $\alpha \to \varphi$ і січна прямує до положення дотичної MN.

Таким чином, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi = k$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, то $f'(x) = k$, тобто похідна $f'(x)$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції у точці з абсцисою x. У цьому полягає геометричний зміст похідної функції в певній точці.

7.1.4. Рівняння дотичної і нормалі до плоскої кривої.

Нехай функція $y = f(t)$ означена і неперервна на деякому проміжку $[a; b]$. Визначимо рівняння дотичної й нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 \in [a;b]$. Оскільки дотична й нормаль проходять через точку з абсцисою x_0, то рівняння кожної з них будемо шукати у вигляді рівняння прямої,



що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ у даному напрямі: $y - y_0 = k(x - x_0)$,

де k кутовий коефіцієнт дотичної.

Використовуючи геометричний зміст похідної, маємо $k = f'(x_0)$.

Оскільки $y_0 = f(x_0)$, то дістанемо **рівняння дотичної** у вигляді:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Нормаль до графіка функції в точці M_0 це перпендикуляр, проведений до дотичної в цій точці.

Використовуючи умову перпендикулярності дотичної та нормалі, знаходимо кутовий коефіцієнт нормалі $k = -\frac{1}{f'(x_0)}$ і записуємо її рівняння у вигляді

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -3$.

Знайдемо похідну від заданої функції $f'(x) = 2x$, звідси $f'(-3) = -6; f(-3) = (-3)^2 = 9$.

Рівняння дотичної і нормалі запишуться так: $y-9=-6(x+3), y-9=\frac{1}{6}(x+3)$ або у загальному вигляді: $6x + y + 9 = 0$, $x - 6y + 57 = 0$.

7.2. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних основних елементарних функцій.

7.2.1. Основні правила диференціювання.

Теорема 1. Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо $y = c$, де c = const, то $y^1=0$

Теорема 2. Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційовних функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій:

$$\left(u(x)\pm v(x)\right)' = u'(x)\pm v'(x).$$

Теорема 3. Похідна добутку двох диференційовних функцій дорівнює добутку першого множника на похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого:

$$\left(uv\right)' = u'v + uv'.$$

Наслідок. Сталий множник можна виносити за знак похідної:

$$\left(cu\right)' = cu', \text{ де } c = \text{const}.$$

Теорема 4. Якщо чисельник і знаменник дробу диференційовні функції (знаменник не перетворюється в нуль), то похідна дробу дорівнює:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Нехай $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$. Функція $f(u)$ називається зовнішньою, а функція $\varphi(x)$ — внутрішньою, або проміжним аргументом.

Теорема 5. Якщо $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ — диференційовні функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

7.2.2. Похідні від основних функцій.

	Елементарні функції	**Складені функції**
1.	$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$	$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2.	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
3.	$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$ $\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
4.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
5.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
6.	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
7.	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
8.	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

9. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

12. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

13. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$ $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

7.2.3. Логарифмічне диференціювання..

Якщо потрібно продиференціювати добуток декількох функцій або дріб, чисельник і знаменник якої містять добутки, часто зручно обидві частини даного виразу спочатку прологарифмувати за основою *e*, а потім уже диференціювати. Цей метод отримав назву логарифмічного диференціювання. Похідна від логарифма функції називається логарифмічною похідною.

Цей метод зручно застосовувати і при диференціюванні виразів, які містять корені з дробів. Його застосовують завжди, коли потрібно продиференціювати функцію виду

$$y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)},$$

тобто коли і основа степеня, і показник степеня є функції змінної *x*.

Приклад. $y = \frac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}$. Знайти y'.

Спочатку прологарифмуємо за основою *e* обидві частини рівності, а потім диференціюємо:

$$\ln y = 2\ln(x+5) + 3\ln(x-4) - 5\ln(x+2) - 2\ln(x+4)$$

Вважаючи $\ln y$ складеною функцією змінної *x*, продиференціюємо обидві частини рівності:

$$\frac{1}{y}y' = 2\cdot\frac{1}{x+5} + 3\cdot\frac{1}{x-4} - 5\cdot\frac{1}{x+2} - 2\cdot\frac{1}{x+4},$$

$$y' = \frac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}\cdot\left(\frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2} - \frac{2}{x+4}\right).$$

Приклад. $y = (\sin x)^{\cos x}$. Знайти y'.

Логарифмуючи обидві частини рівності, отримаємо

$$\ln y = \cos x\cdot\ln\sin x,$$

$$\frac{1}{y}y' = -\sin x\cdot\ln\sin x + \cos x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x,$$

$$y' = (\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\cdot\ln\cos x\right).$$

7.2.4. Диференціювання функцій заданих неявно.

Якщо незалежна змінна *x* і функція у пов'язані рівнянням виду $f(x, y) = 0$, яке нерозв'язне відносно *y*, то у називається неявною функцією змінної *x*.

Диференціювання неявної функції полягає в тому, що обидві частини рівняння $f(x, y) = 0$ диференціюються по *x* з урахуванням, що *y* є функцією *x*, з отриманого рівняння визначається y'.

Приклад. Знайти похідну y' неявної функції $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Диференціюємо обидві частини даного рівняння:

$$3x^2 + 3y^2y' - 3a(y + xy') = 0,$$

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

7.2.5. Диференціювання функцій заданих параметрично.

Похідна функції

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases},$$

заданої параметрично, обчислюється за формулою:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад. Знайти похідну від функції, заданої параметрично

$$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$$

$$x'_t = -2\sin t + 2\sin 2t = 4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2},$$
$$y'_t = 2\cos t - 2\cos 2t = 4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2},$$
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}} = tg\frac{3t}{2}.$$

Контрольні запитання.

1. Що називається похідною?
2. В чому полягає механічний і геометричний зміст похідної ?
3. Запишіть рівняння дотичної і нормалі до графіка функції в певній точці.
4. Сформулюйте основні правила диференціювання функцій.
5. Запишить таблицю похідних елементарних функцій.

7.3. Диференціал функції та його застосування.

7.3.1. Означення диференціалу функції.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на деякому проміжку, тобто для будь-якої точки x з цього проміжку границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ існує і дорівнює скінченному числу.

Враховуючи взаємозв'язок змінної величини, що має скінченну границю, і нескінченної малої величини, можемо записати $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)+\alpha$, де α — нескінченно мала величина ($\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$).

Помноживши всі члени останньої рівності на Δx, дістанемо

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$$

З виразу випливає, що приріст функції Δy складається із суми двох доданків, з яких перший доданок — так звана **головна частина приросту**, лінійна відносно

Δx (при $\Delta x \to 0$ добуток $f'(x)\Delta x$ є нескінченно мала величина першого порядку відносно Δx). Другий доданок — добуток $\alpha\Delta x$ завжди нескінченно мала величина вищого порядку, ніж Δx.

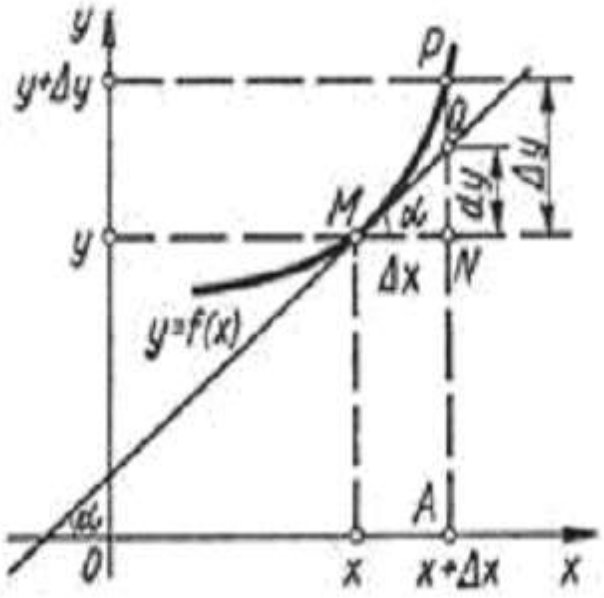
Означення. Добуток $f'(x)\Delta x$ називається диференціалом функції $y = f(x)$; його позначають символом dy, тобто

$$dy = f'(x)\Delta x$$

З'ясуємо механічний зміст диференціала. Нехай матеріальна точка рухається за відомим законом $S = f(t)$, де $f(t)$ — диференційовна на деякому проміжку функція.

Тоді диференціал цієї функції $dS = f'(t)\Delta t$ при фіксованих значеннях t і Δt — це той шлях, який пройшла б матеріальна точка за час Δt, якби вона рухалась прямолінійно і рівномірно із сталою швидкістю $\vartheta = f'(t)$. Зрозуміло, що фактичний шлях ΔS у випадку нерівномірного руху на відміну від диференціала dS не є лінійною функцією часу Δt і тому відрізняється від шляху dS. Проте якщо час Δt достатньо малий, то швидкість руху не встигає суттєво змінитись, і тому рух точки на проміжку часу від t до $t + \Delta t$ є майже рівномірним.

Геометричний зміст диференціала зрозумілий з малюнка.



Маємо:

$$\mathrm{PN} = \Delta y,\ \mathrm{QN} = \mathrm{MN}tg\alpha = \Delta x\, f'(x) = f'(x)dx = dy$$

Отже, диференціал функції $f(x)$ при заданих значеннях x і Δx дорівнює приросту ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x. Приріст функції y при цьому дорівнює приросту ординати кривої. Таким чином, заміна приросту функції на її диференціал геометрично означає заміну ординати AP кривої ординатою дотичної AQ. Зрозуміло, що така заміна доцільна лише для достатньо малих значень x.

7.3.2. Правила знаходження диференціала.

1. $y = c;\ dy = 0;$
2. $y = uv,\ dy = udv + vdu;$
3. $y = u + v,\ dy = du + dv;$
4. $y = \frac{u}{v},\ dy = \frac{vdu - udv}{v^2}.$

Особливо важливий висновок випливає з правила диференціювання складеної функції. Нехай $y = f(x) = f(\varphi(t))$ — складена функція з проміжним аргументом $x = \varphi(t)$ і кінцевим аргументом t, причому функції $f(x)$, $\varphi(t)$ диференційовні в точках x і t.

Тоді існує похідна $y'_t = y'_x x'_t$, а отже, і диференціал

$$dy = y'_t\,dt = y'_x\,x'_t\,dt = y'_x\,dx$$

Таким чином, перший диференціал функції $y = f(x)$ визначається за однією і тією самою формулою незалежно від того, чи змінна x є незалежною змінною, чи вона є функцією іншої змінної.

Цю властивість диференціала називають інваріантністю (незмінністю) форми диференціала.

Теорема. Форма диференціала не залежить від того, чи є аргумент незалежною змінною або функцією.

7.3.3. Застосування диференціала.

Відомо:

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x .$$

Якщо $f'(x) \neq 0$, то величина $\alpha\Delta x$ є малою вищого порядку порівняно з *dy*. При малих Δx доданком $\alpha\Delta x$ у виразі нехтують і користуються наближеною рівністю $\Delta y \approx dy$, або в розгорнутому вигляді: $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, звідки

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Остання наближена рівність тим точніша, чим менше Δx.

Приклад. Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

Перетворимо вираз, що стоїть під знаком радикала:

$27 = 25 + 2 = 25\left(1 + \frac{2}{25}\right)$, звідки $\sqrt{27} = \sqrt{25\left(1 + \frac{2}{25}\right)} = 5\sqrt{1 + \frac{2}{25}}$

При обчисленні $\sqrt{1 + \frac{2}{25}}$ введемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$, тоді $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Тоді:

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$, де $x = 1, \Delta x = \frac{2}{25}$.

Інакше:

$$\sqrt{1 + \frac{2}{25}} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}\frac{2}{25} = 1 + \frac{1}{25} = 1{,}04 .$$

Дістанемо:

$$\sqrt{27} \approx 5 \cdot 1{,}04 = 5{,}2$$

Приклад. Знайти наближене значення функції $f(x) = x^3 + 2$ при x=2,01.

Представимо *x* у вигляді суми (2+0,01), де 0,01 будемо розглядати як приріст аргументу.

Оскільки $\Delta y \approx dy$, то $f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy$.

$$dy = \left(x^3 + 2\right)' dx = 3x^2 dx = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}12;$$
$$f(2{,}01) \approx 10 + 0{,}12 = 10{,}12.$$

Контрольні запитання.

6. Що таке диференціал функції?
7. Для чого застосовується диференціал функції?
8. Наведіть приклади застосування диференціалу.

7.4 Застосування похідної для дослідження властивостей функцій

Похідна функції має широке застосування при розв'язуванні різних задач математики, фізики, техніки та економіки. Так, наприклад, за допомогою похідної можна обчислити границю функції, знайти екстремум функції, інтервали монотонності, точки перегину функції та інше.

7.4.1. Зростання та спадання функцій.

Нагадаємо, що функція $f(x)$ називається зростаючою на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто якщо $x_2 > x_1$ то $f(x_2) > f(x_1)$. Також функція спадна на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, тобто якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$.

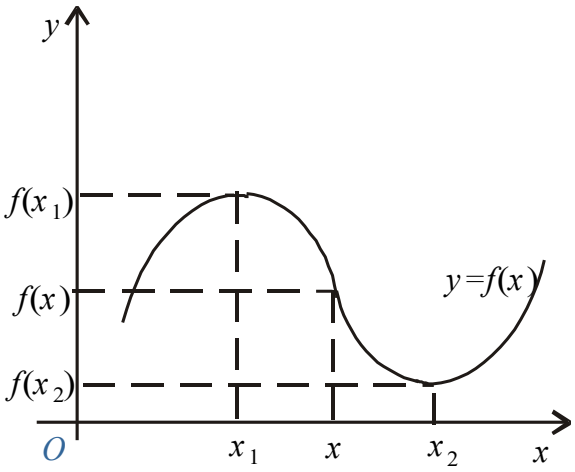
Теорема 1 (необхідна умова зростання (спадання) функції). Якщо диференційовна функція зростає (спадає) на деякому проміжку, то похідна цієї функції невід'ємна (недодатна) на цьому проміжку.

Теорема 2 (достатня умова зростання (спадання) функції). Якщо похідна диференційовної функції додатна (від'ємна) всередині деякого проміжку, то функція зростає (спадає) на цьому проміжку.

7.4.2. Екстремуми функцій.

Означення. При значенні x_1 аргументу x функція $f(x)$ має максимум $f(x_1)$, якщо в деякому околі точки x_1 виконується нерівність $f(x_1) > f(x)(x \neq x_1)$.

Аналогічно: при значенні x_2 аргументу x функція $f(x)$ має мінімум $f(x_2)$, якщо в деякому околі точки x_2 виконується нерівність $f(x_2) < f(x)(x \neq x_2)$.

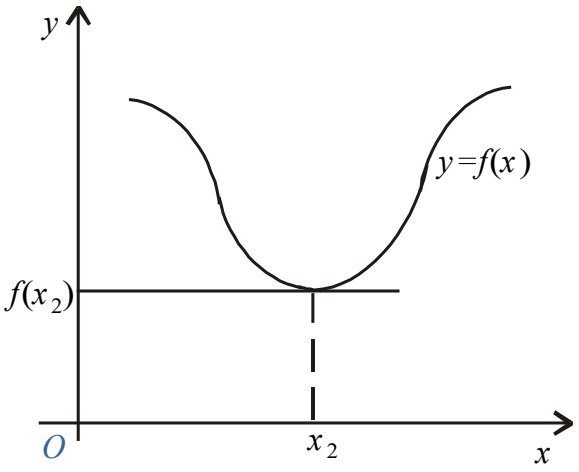


Максимум або мінімум функції називається екстремумом функції, а ті значення аргументу, при яких досягаються екстремуми функції, називаються точками екстремуму функції (відповідно точками максимуму або мінімуму функції). Екстремум функції, у загальному випадку, має локальний характер — це найбільше або найменше значення функції порівняно з ближніми її значеннями.

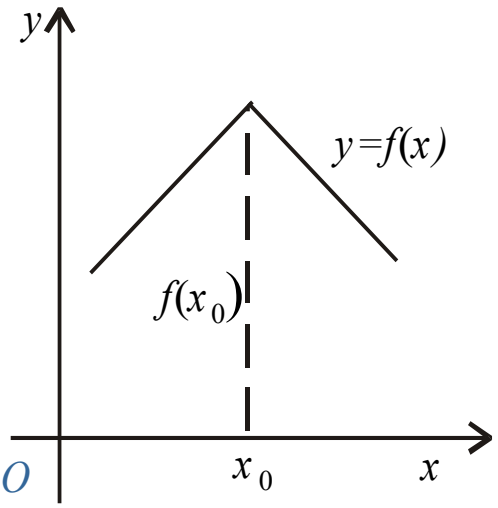
Теорема (необхідна умова екстремуму функції). У точці екстремуму диференційовної функції похідна її дорівнює нулю:

$$f'(x)=0.$$

Геометрична умова означає, що в точці екстремуму диференційовної функції $y=f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі *Ox*:



Наслідок. Неперервна функція може мати екстремум тільки в тих точках, де похідна функції дорівнює нулю або не існує.



Справді, якщо в точці x_0 екстремуму функції $f(x)$ існує похідна $f'(x_0)$, то, згідно з даною теоремою, ця похідна дорівнює нулю. Те, що в точці екстремуму неперервної функції похідна може не існувати, показує приклад функції, графік якої має форму «ламаної».

Ті значення аргументу x, які для заданої функції перетворюють на нуль її похідну $f'(x)$ або для якої похідна $f'(x)$ не існує (наприклад, перетворюється на нескінченність), називаються критичними значеннями аргументу (критичними точками).

Із того, що $f'(x_0)=0$, не випливає, що функція $f(x)$ має екстремум при $x=x_0$.

Наприклад, нехай $f(x)=x^3$. Тоді $f'(x)=3x^2$ і $f'(0)=0$, однак значення $f(0)=0$ не є екстремумом даної функції.

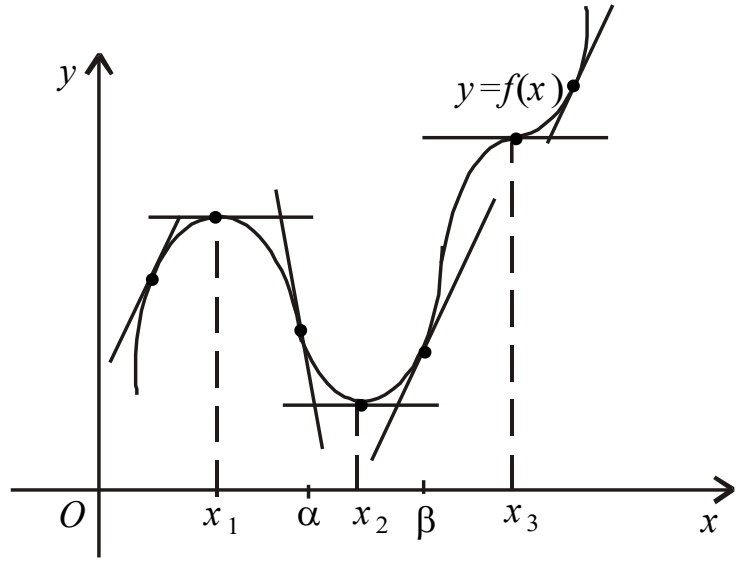
Отже, не для будь-якого критичного значення аргументу функції $f(x)$ має місце екстремум цієї функції. Через це поряд з необхідною умовою існують достатні умови існування екстремуму функції.

Теорема 1 (достатня умова екстремуму функції). Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі, в якому міститься критична точка x_0, і диференційовна в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки x_0). Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна:

1) змінює знак з «+» на «–», то функція має у цій точці максимум;
2) змінює знак «–» на «+», то функція має у цій точці мінімум;
3) не змінює свого знака, то функція в точці $x = x_0$ екстремуму не має.

Геометричну ілюстрацію теореми розглянемо на малюнку. Нехай у точці $x = x_1$ маємо $f'(x_1)=0$ і для всіх x, достатньо близьких до точки x_1, виконуються нерівності

$$\begin{cases} f'(x)>0 \text{ при } x<x_1; \\ f'(x)<0 \text{ при } x>x_1. \end{cases}$$



Тоді при $x < x_1$ дотична до кривої утворює з віссю Ох гострий кут — функція зростає, а при $x > x_1$ дотична утворює з віссю Ох тупий кут — функція спадає; при $x = x_1$ функція переходить від зростання до спадання, тобто має максимум.

Якщо в точці x_2 маємо $f'(x_2)=0$ і для всіх значень x, достатньо близьких до точки x_2, виконуються нерівності

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & x > x_2, \\ f'(x) < 0, & x < x_2, \end{cases}$$

то при $x < x_2$ дотична до кривої утворює з віссю Ох тупий кут — функція спадає, а при $x > x_2$ дотична до кривої утворює гострий кут — функція зростає. При $x = x_2$ функція переходить від спадання до зростання, тобто має мінімум.

Якщо при $x = x_3$ маємо $f'(x_3)=0$ і для всіх значень x, достатньо близьких до x_3, виконуються нерівності $f'(x)>0$ при $x < x_3$; $f'(x)>0$ при $x > x_3$, то функція зростає як при $x < x_3$, так і при $x > x_3$. Звідси при $x = x_3$ функція не має екстремуму.

Зауваження. На основі даної теореми можна сформулювати таке правило для дослідження неперервної функції $y = f(x)$ на максимум і мінімум.

1. Знаходимо першу похідну функції.
2. Обчислюємо критичні значення аргументу x (критичні точки), для цього:

- прирівнюємо першу похідну до нуля і знаходимо дійсні корені здобутого рівняння $f'(x)=0$;

- знаходимо значення x, для яких похідна $f'(x)$ має розрив.

3. Досліджуємо знак похідної ліворуч і праворуч від кожної критичної точки
4. Обчислюємо значення функції $f(x)$ у кожній критичній точці.

Теорема 2 (достатня умова екстремуму функції). Якщо для диференційовної функції $f(x)$ у деякій точці x_0 її перша похідна $f'(x)$ дорівнює нулю, а друга похідна $f''(x)$ існує й відмінна від нуля, тобто $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, то:

1) якщо друга похідна $f''(x_0)>0$, то в точці x_0 функція $f(x)$ має мінімум;

2) якщо $f''(x_0)<0$ — максимум;

3) якщо $f''(x_0)=0$ — питання залишається відкритим, і для його розв'язання треба застосувати перше правило.

Зауваження. Для критичних точок, в яких похідна функції не існує або дорівнює нескінченності, друге правило не застосовується.

Приклад. Дослідити на максимум і мінімум функцію $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

1. Знаходимо першу похідну $y'=x^2-4x+3$.

2. Знаходимо дійсні корені рівняння $x^2-4x+3=0\,(f'(x)=0)$. Звідки $x_1=1,\ x_2=3$.

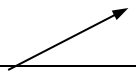
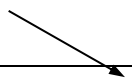
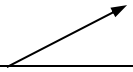
3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції $(-\infty,\ +\infty)$ здобутими критичними точками розбиваємо на три інтервали $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ 3)$, $(3,\ +\infty)$. Виберемо в кожному інтервалі по одній точці і обчислимо значення похідної в цих точках:

$$x=0\in(-\infty,1),\ y'(0)=3>0;$$

$$x=2\in(1,3),\ y'(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1<0;$$

$$x=4\in(3,+\infty),\ y'(4)=4^2-4\cdot 4+3=11>0.$$

Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу.

x	$(-\infty,\ 1)$	1	$(1,\ 3)$	3	$(3,\ +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y		$y_{\max}(1)=\frac{7}{3}$		$y_{\min}(3)=1$	

З таблиці видно: при переході (зліва направо) через значення $x=1$ похідна змінює знак з «+» на «–». Звідси, при $x=1$ функція має максимум:

$$y_{\max}(1)=\frac{1^3}{3}-2\cdot 1^2+3\cdot 1+1=\frac{7}{3}.$$

При переході через значення $x=3$ похідна змінює знак з «–» на «+». Звідси, при $x=3$ функція має мінімум:

$$Y_{\min}(3)=\frac{3^3}{3}-2\cdot 3^2+3\cdot 3+1=1.$$

На інтервалі: $(-\infty, 1)$ — функція зростає; $(1, 3)$ — спадає; 3) $(3, +\infty)$ — зростає.

Другий спосіб. За допомогою другої похідної зробимо дослідження функції $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ на екстремум.

Перша похідна цієї функції $y'=x^2-4x+3$ перетворюється в нуль у точках x = 1 і x = 3 (див. попередній приклад).

Друга похідна $y''=2x-4$:

а) при x = 1 $y''(1)=2\cdot 1-4=-2<0$, звідси в точці x = 1 функція має максимум $y_{\max}(1)=\frac{7}{3}$;

б) при $x=3$ $y''(3)=2\cdot 3-4=2>0$, тобто в точці $x=3$ функція має мінімум $Y_{\min}(3)=1$

.

7.4.3. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку [*a; b*], то вона набуває на цьому проміжку свого найбільшого й найменшого значення.

Найбільше значення функції на проміжку [*a; b*] називається абсолютним максимумом, а найменше — абсолютним мінімумом.

Припустимо, що на даному проміжку функція $f(x)$ має скінченне число критичних точок. Якщо найбільше значення досягається в середині проміжку [*a; b*], то очевидно, що це значення буде одним із максимумів функції (якщо існує кілька максимумів), точніше — найбільшим максимумом. Однак можливо, що найбільше значення досягатиметься на одному з кінців проміжку.

Таким чином, **функція на відрізку [*a, b*] досягає свого найбільшого значення на одному з кінців цього проміжку або в такій точці його, яка є точкою максимуму**.

Аналогічне твердження можна сформулювати й про найменше значення функції: **воно досягається на одному з кінців даного проміжку або в такій внутрішній точці, яка є точкою мінімуму**.

Правило. Якщо треба знайти найбільше значення неперервної функції на проміжку [*a, b*], то необхідно:

1) знайти всі максимуми функції на проміжку;

2) визначити значення функції на кінцях проміжку, тобто обчислити $f(a)$ і $f(b)$;

3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше: воно й буде найбільшим значенням функції на проміжку.

Аналогічно треба діяти і при визначенні найменшого значення функції на проміжку.

Приклад. Визначити на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ найбільше й найменше значення функції $y = x^3 - 3x + 3$.

1. Знаходимо максимуми й мінімуми функції на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$:

$y' = 3x^2 - 3, 3x^2 - 3 = 0,\ \ x_1 = 1,\ \ x_2 = -1;$

$y'' = 6x,\ y''(1) = 6 > 0.$

Таким чином, у точці $x = 1$ маємо мінімум: $y_{\min}(1) = 1$.

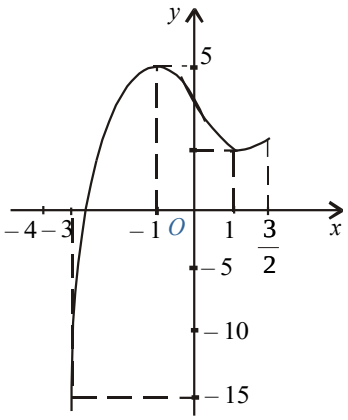
Далі, $y''(-1) = -6 < 0$, тобто в точці $x = = -1$ маємо максимум: $y_{\max}(-1) = 5$.

2. Визначаємо значення функції на кінцях проміжку:

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8},\ \ y(-3) = -15.$$

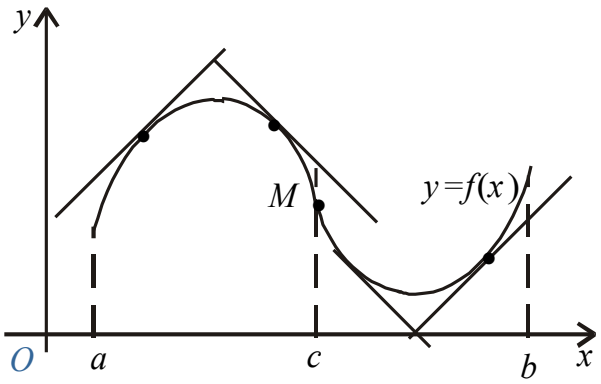
3. Таким чином, найбільше значення заданої функції на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ є: $y_{\text{найб}} = y_{\max}(-1) = 5$, а найменше — $y_{\text{найм}} = y(-3) = -15$.

Графік функції зображено на малюнку:



7.4.4. Опуклість і вгнутість кривої. Точка перегину.

Означення. Крива на проміжку називається опуклою (угнутою), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) будь-якої її дотичної на цьому проміжку.



З графіка функції $y = f(x)$, який показано на малюнку бачимо: крива $y = f(x)$ є опуклою на проміжку (a, c) і вгнутою на проміжку (c, b).

Означення. Точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від вгнутої, називається точкою перегину.

На малюнку графіка функції, що наведено раніше, точка M — точка перегину.

Розглянемо дві теореми.

Теорема 1. 1) Якщо в усіх точках проміжку (c, b) для функції $y = f(x)$ друга її похідна додатна $(f''(x) > 0)$, то графік функції вгнутий.

2) Якщо в усіх точках проміжку (a, c) друга похідна від'ємна $(f''(x) < 0)$, то графік функції випуклий.

Теорема 2. Якщо для функції $y = f(x)$ друга похідна її $f''(x)$ у деякій точці x_0 перетворюється на нуль або не існує й при переході через цю точку змінює свій знак на обернений, то точка $M(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.

Зауваження. Якщо у точці x_0 друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, але при переході через цю точку $f''(x)$ не змінює свого знака, то точка $M(x_0, f(x_0))$ не є точкою перегину.

Приклад. Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y = e^{-x^2}$.

Маємо $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

Друга похідна y'' перетворюється в нуль, коли

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0, \text{ звідки } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При переході через точки x_1 і x_2 друга похідна змінює знак.

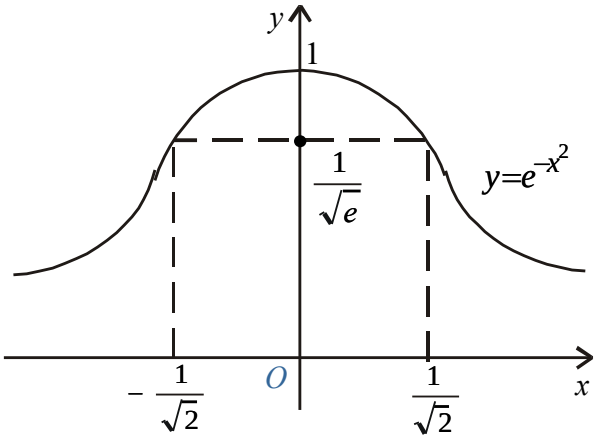
Таким чином, точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції.

Результати дослідження заносимо в таблицю:

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$

y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	Перегин	$\cap$	Перегин	$\cup$

Із цієї таблиці бачимо, що графік функції на інтервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ вгнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — опуклий.



7.4.5. Алгоритм дослідження функції та побудови графіка.

При дослідженні функцій треба:

1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.
3. Знайти точки розриву функції та їх характер.
4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках.
6. Визначити інтервали зростання й спадання функції.
7. Знайти точки перегину, інтервали випуклості й вгнутості.
8. Знайти асимптоти.
9. Знайти граничні значення функції, коли x прямує до граничних точок області визначення.

Графік функції будують за характерними точками й лініями, отриманими у результаті дослідження. Якщо їх недостатньо, знаходять допоміжні точки для деяких конкретних значень аргументу.

Приклад. Дослідити функцію $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x за винятком значення $x = 1$. Звідси її область визначення: $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

2. Точка $x = 1$ є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x\to 1\pm 0} y = \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 1\pm 0}(x-1)^2} = +\infty .$$

Як ліворуч, так і праворуч точки $x = 1$ маємо нескінченний розрив.

Точка $x = 1$ — точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат:

- з віссю Ox: $y = 0$, $\quad \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0,\ 2x-1=0,\ x=\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2};\ 0\right)$;

- з віссю Oy: $x = 0$, $\quad y = \frac{-1}{1} = -1,\ (0;\ -1)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у таблицю:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3};\ y' = 0 \Rightarrow\ -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$ — критична точка.

При $x = 1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує.

Дослідимо критичну точку $x = 0$ на екстремум:

при $x = -1$ $y' = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} < 0(-)$;

при $x = \frac{1}{2}$ $y' = \frac{-1}{-1/8} = 8 > 0(+)$.

x	$(-\infty, 0)$	0	(0, 1)	1	$(1, +\infty)$
y'	–	0	+	Не існує	–
y	↘	$y_{\min}(-1)$	↗	Не існує	↘

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці $x = 0$ функція має мінімум:

$$y_{\min} = \frac{-1}{1} = -1.$$

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'(x) < 0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$; $y'' = 0 \Rightarrow 2(2x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$; при $x = 1$ y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x = -\frac{1}{2}$:

при $x = -1$ $y'' = \frac{2(-2+1)}{(-2)^4} = -\frac{1}{8} < 0(-)$;

при $x = 0$ $y'' = \frac{2}{1} = 2 > 0(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x = -\frac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = -\frac{8}{9} \approx -0{,}9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$ — точка перегину.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'' > 0$, значить, графік функції вгнутий.

Результати дослідження заносимо у таблицю:

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
y''	+	0	+	Не існує	+
y	$\cap$	Перегин (– 8/9)	$\cup$	Не існує	$\cup$

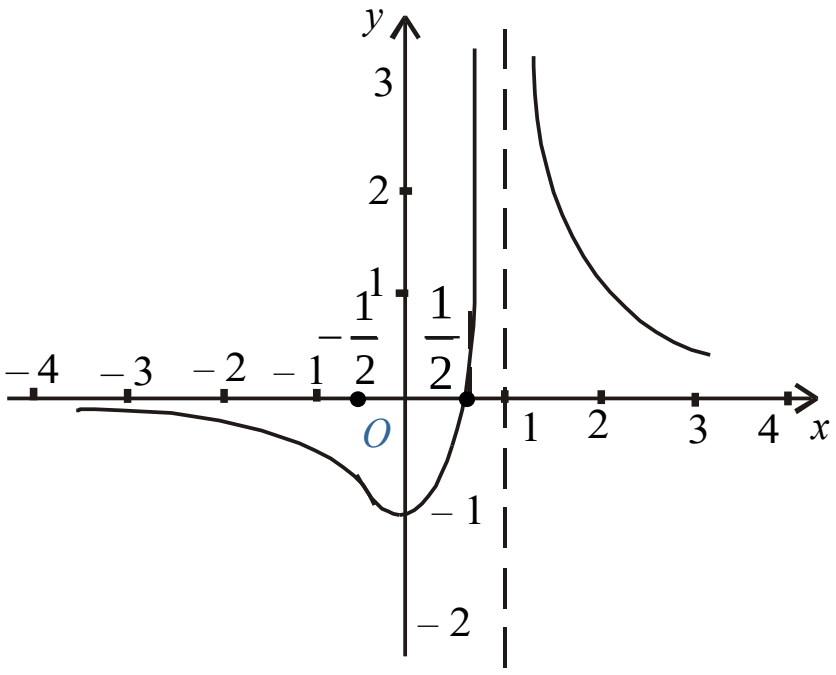
7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y = 0$ (вісь Ox).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції.



Контрольні запитання.

9. Сформулюйте необхідну і достатню умову монотонності функції на інтервалі. Поясніть на прикладах.
10. Що називається екстремумом функції? Сформулюйте необхідну і достатню умову існування екстремума функції в певній точці.
11. Яка функція на проміжку називається опуклою та угнутою?
12. При виконанні яких вимог функція буде мати точку перегину на певному інтервалі?