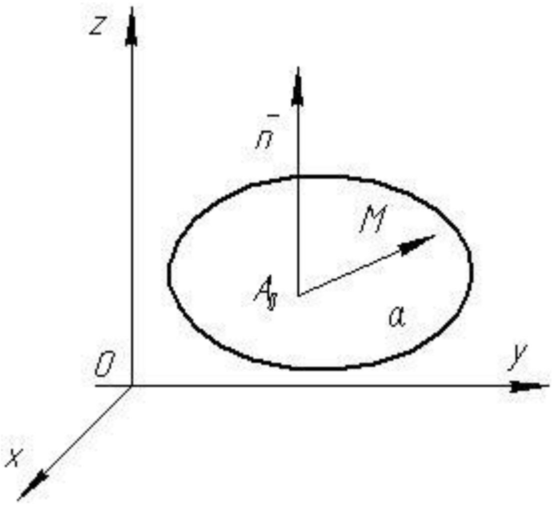
Лекція 5. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

План

5.1. Площина в просторі. Основні рівняння і задачі.
5.2. Пряма в просторі. Основні рівняння і задачі.

5.1. Площина в просторі. Основні рівняння і задачі

5.1.1. Загальне рівняння площини.



Нехай задана площина α, $\vec{n}(A;B;C)$ - вектор, перпендикулярний (нормальний) до площини α
$M(x;y;z)$ - довільна точка площини,
$A_0(x_0;y_0;z_0)$ - фіксована точка площини.
$\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{(x-x_0;y-y_0;\ z-z_0)}$
Так як $\vec{n} \perp \alpha$, то $\vec{n} \perp \overrightarrow{A_0M} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_0M} = 0$
$\overrightarrow{(A;B;C;)} \cdot \overrightarrow{(x-x_0;y-y_0;\ z-z_0)} = 0$

Розкриємо дужки і отримаємо

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

- ***рівняння площини, що має нормальний вектор $\bar{n}(A;B;C)$.***

Розкриємо дужки в цьому рівнянні і виконаємо деякі перетворення:

$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$

$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$, позначимо $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, тоді отримаємо

$$Ax+By+Cz+D=0$$

- ***рівняння площини в загальному вигляді.***

Дослідження загального рівняння площини:

1) $A = 0$, $By + Cz + D = 0$ - рівняння площини, паралельної осі Ох;

2) $B = 0$, $Ax + Cz + D = 0$ - рівняння площини, паралельної осі Оу;

3) $C = 0$, $Ax + By + D = 0$ - рівняння площини, паралельної осі Оz;

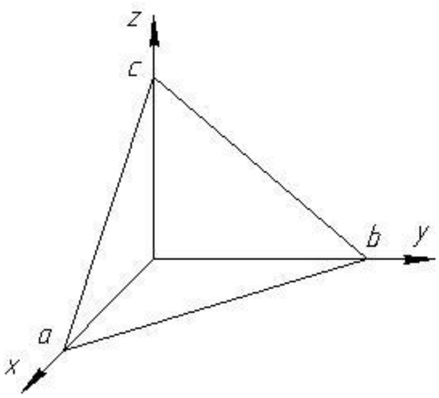
4) $D = 0$, $Ax + By + Cz = 0$ - рівняння площини, що проходить через початок системи координат;

5) $A = B = 0$, $Cz + D = 0$ - рівняння площини, паралельної площині ХОУ;

6) $A = C = 0$, $By + D = 0$ - рівняння площини, паралельно площині ХОZ;

7) $B = C = 0$, $Ax + D = 0$ - рівняння площини, паралельно площині УОZ;

5.1.2 Рівняння площини у відрізках на осях.



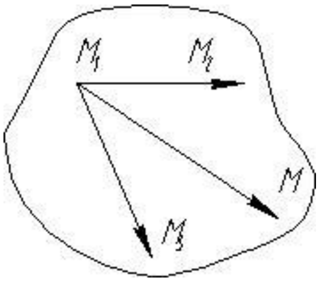
$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$Ax + By + Cz = -D$$
$$\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z = 1$$
$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{c}{-\frac{D}{C}} = 1$$

позначимо $-\frac{D}{A} = a;\quad -\frac{D}{B} = b;\quad -\frac{D}{C} = c$, тоді

$$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

- *рівняння площини у відрізках на осях*

5.1.3. Рівняння площини, що проходить через три точки.



Точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ - фіксовані точки площини, $M(x; y; z)$ - довільна точка площини.
З цих чотирьох точок утворимо три вектори

$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{(x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1)}$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)}$

$\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{(x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1)}$

Ці вектори лежать в одній площині, якщо їх змішаний добуток дорівнює нулю:

$$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_2M_1} \cdot \overline{M_3M_1} = 0$$

Розкриємо цей вираз і отримаємо:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x - x_1} & \boldsymbol{y - y_1} & \boldsymbol{z - z_1} \\ \boldsymbol{x_2 - x_1} & \boldsymbol{y_2 - y_1} & \boldsymbol{z_2 - z_1} \\ \boldsymbol{x_3 - x_1} & \boldsymbol{y_3 - y_1} & \boldsymbol{z_3 - z_1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$$

- ***рівняння площини, що проходить через три точки***.

5.1.4. Взаємне розміщення двох площин.

Нехай дві площини α_1 і α_2 задані загальними рівняннями

$\alpha_1 : \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\alpha_2 : \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

1. ***Дві площини паралельні***, якщо $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$
2. ***Дві площини перпендикулярні***, якщо скалярний добуток їх нормальних векторів $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$ дорівнює нулю: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Кут між двома площинами знаходиться як кут між нормальними векторами цих площин

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right| \cdot \left|\overline{n_2}\right|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Відстань від точки $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ ***до площини*** $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5.2. Пряма у просторі. Основні рівняння і задачі.

5.2.1. Загальне рівняння прямої у просторі.

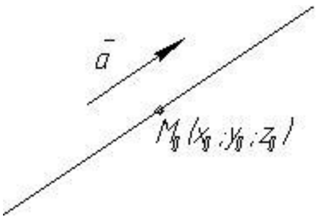
Пряму можна задати як перетин двох площин:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Напрямний вектор прямої, заданої системою (1) обчислюється за формулою

$$\vec{a}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

5.2.2. Канонічне рівняння прямої.



Нехай $M_0(x_0;y_0;z_0)$ - довільна точка прямої, $\vec{a}(k;l;m)$ - напрямний вектор прямої, координати якого обчислюються з системи (1) $k=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ $\quad l=-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$ $\quad m=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$

$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}$ - канонічне рівняння

5.2.3. Параметричні рівняння прямої.

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}=t$$

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{k}=t, \\ \frac{y-y_0}{l}=t, \\ \frac{z-z_0}{m}=t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x_0+kt, \\ y=y_0+lt, \\ z=z_0+mt. \end{cases}$$

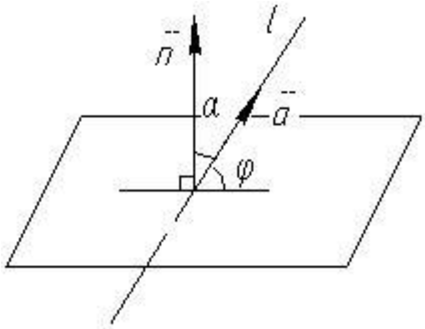
- параметричні рівняння, де $M_0(x_0;y_0;z_0)$ - задана точка, що належить прямій, $\vec{a}(k;l;m)$ - напрямний вектор прямої.

5.2.4. Рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Якщо пряма проходить через дві точки у просторі $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

5.3. Кут між прямою і площиною.



Нехай φ - кут між прямою ℓ і площиною β, α - кут між нормальним вектором $\vec{n}(A;B;C)$ площини β і напрямним вектором $\vec{a}(k;l;m)$ прямої ℓ

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$ знаходять за формулою

$$\sin\varphi=\frac{\bar{n}\cdot\bar{a}}{|\bar{n}|\cdot|\bar{a}|}=\frac{Ak+Bl+Cm}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{k^2+l^2+m^2}}$$

Умова паралельності прямої $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}$ і площини $Ax+By+Cz+D=0$: $Ak+Bl+Cm=0$

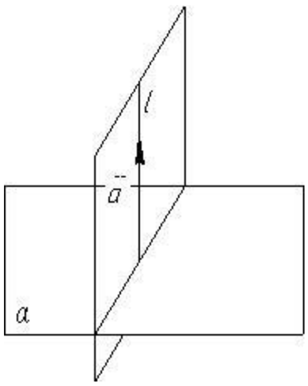
Умова перпендикулярності прямої $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}$ і площини $Ax+By+Cz+D=0$:

$$\frac{A}{k}=\frac{B}{l}=\frac{C}{m}$$

5.4. Окремі випадки завдання площини у просторі.

5.4.1. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму, перпендикулярно до заданої площини.

Нехай пряма ℓ задана рівнянням $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}$, а площина α задана рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$ причому $\ell \perp \alpha$. Тоді рівняння має вигляд:



$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ k & l & m \\ A & B & C \end{vmatrix}=0$$

5.4.2. Рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі.

Дві паралельні прямі l_1 і l_2 задані відповідно рівняннями

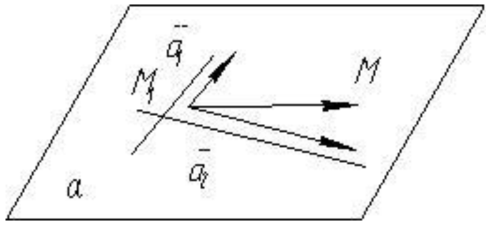
$l_1: \quad \frac{x-x_1}{k}=\frac{y-y_1}{l}=\frac{z-z_1}{m} \qquad l_2: \quad \frac{x-x_2}{k}=\frac{y-y_2}{l}=\frac{z-z_2}{m}$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ k & l & m \end{vmatrix}=0$$ - рівняння шуканої площини.

5.4.3. Рівняння площини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються.

Дві прямі, що перетинаються l_1 і l_2 задані відповідно рівняннями

$l_1: \quad \frac{x-x_1}{k_1}=\frac{y-y_1}{l_1}=\frac{z-z_1}{m_1} \qquad l_2: \quad \frac{x-x_2}{k_2}=\frac{y-y_2}{l_2}=\frac{z-z_2}{m_2}$



Тоді:

$$\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0$$ - рівняння шуканої площини.

5.4.4. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму і задану точку.

Дана пряма l задана рівнянням $l: \ \dfrac{x - x_0}{k} = \dfrac{y - y_0}{l} = \dfrac{z - z_0}{m}$ і точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ $(M_1 \notin l)$.

Тоді:

$$\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ k & l & m \end{vmatrix} = 0$$ - рівняння шуканої площини.

Контрольні запитання.

1. Запишіть загальне рівняння площини. Зробіть його досліження.
2. Які умови паралельності та перпендикулярності площин?
3. Запишіть рівняння площини, що проходить через три точки.
4. Запишіть види рівнянь прямої у просторі.
5. Як знайти кут між прямою і площиною?
6. Запишіть рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі.
7. Запишіть рівняння площини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються.
8. Запишіть рівняння площини, яка проходить через задану пряму і задану точку.