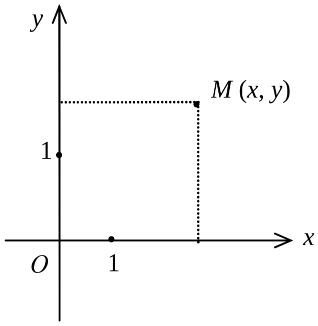
Лекція 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

План

1. Лінії на площині.
2. Пряма на площині. Відповідні рівняння.
3. Взаємне розміщення прямих на площині.

4.1.1. Системи координат на площині

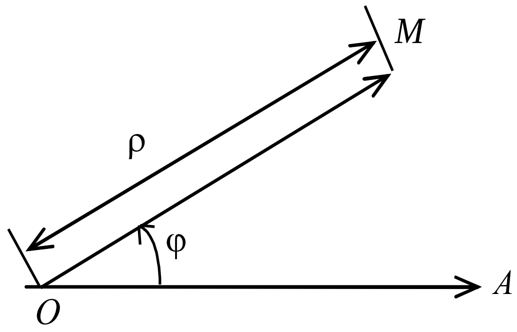
А) Дві взаємно перпендикулярні осі *Ox, Oy* які мають спільний початок точку *O* і однакову масштабну одиницю, утворюють **прямокутну декартову систему координат на площині.**



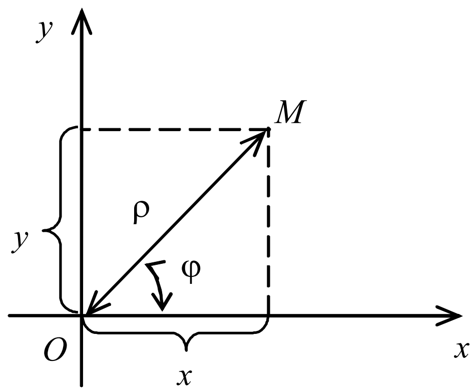
Осі *Ox, Oy* називаються відповідно **осями абсцис і ординат,** точка *O* — **початок системи координат**. Проекції точки на осі координат називають декартовими координатами x та y відповідно.

Таким чином, кожній точці на площині — впорядкована пара чисел (x, y), тобто встановлюється відповідність між геометричним образом — точкою і впорядкованою множиною чисел

Б) Полярна система координат складається з деякої точки площини *O*, яка називається **полюсом**, променя *OA,* що виходить з цієї точки і називається **полярною віссю.** Крім того, задається одиниця масштабу для вимірювання довжин відрізків.



Означення. Полярними координатами точки М називаються числа **ρ** — відстань від полюса *O* до точки *M* і **φ** — кут, на який треба повернути полярну вісь *OA* до її збігу з *OM,* проти годинникової стрілки.



Полярний радіус ρ може змінюватись у межах $0 \leq \rho \leq \infty$, полярний кут, як правило, змінюється в межах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$..

Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки встановлюють формули:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Приклад. Знайти полярні координати точки *M* (2, 2).

З формули (2.1) маємо $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, tgφ = 1. Згідно з останньою рівністю $\varphi = \frac{\pi}{4}$, або $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, але $y = 2 > 0$ і $x = 2 > 0$, маємо $\varphi = \frac{\pi}{4}$. У полярних координатах точка $M\left(2\sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}\right)$.

4.1.2. Лінії на площині

Поняття лінії є одним з найскладніших понять математики.

Рівнянням лінії в декартових координатах на площині називається рівняння виду $F(x;y)=0$, яке задовольняють координати $(x;y)$ будь – якої точки цієї лінії і не задовольняють координати будь – якої точки, що не належить цій лінії.

4.2. Пряма на площині. Рівняння прямої на площині.

4.2.1. Загальне рівняння прямої.

У прямокутній системі координат пряма лінія задається рівнянням першого степеня відносно x і y.

$$Ax + By + C = 0,$$

і навпаки, дане рівняння при довільних A, B, C (A і B одночасно не дорівнюють нулю) визначає деяку пряму в прямокутній системі координат Oxy.

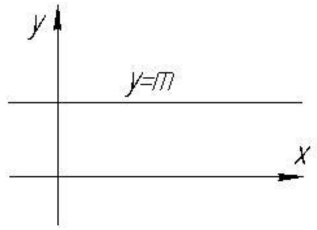
Вказане рівняння називається **загальним рівнянням прямої лінії.**

Дослідимо це рівняння.

Якщо А=0, $By+C=0$

$y=-\dfrac{C}{B}=m$ - рівняння прямої, паралельної осі Ох.

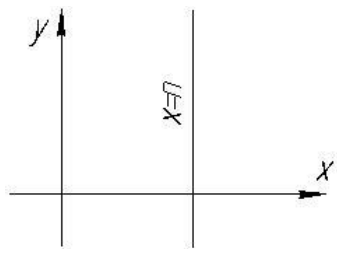
$y=0$ - рівняння осі абсцис (Ох)



Якщо В=0, то $Ax+C=0$, то

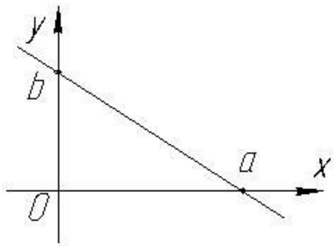
$x=-\dfrac{C}{A}=n$ - рівняння прямої, паралельної осі Оу

Якщо: $x=0$ - рівняння осі ординат (Оу)



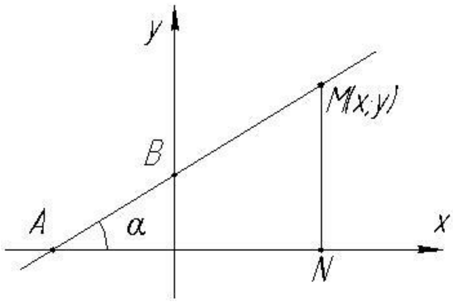
4.2.2 Рівняння прямої у відрізках на осях.

$$Ax+By+C=0$$
$$Ax+By=-C$$
$$-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$$
$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$



Позначимо: $-\dfrac{C}{A}=a,\quad -\dfrac{C}{B}=b$, тоді $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

4.2.3 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.



$$Ax + By + C = 0$$

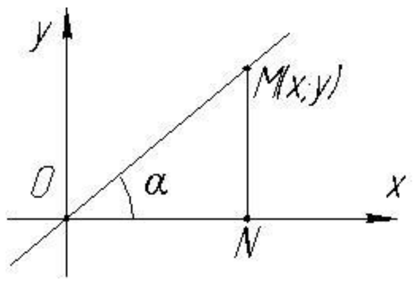
$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Позначимо $-\frac{A}{B} = k, \quad -\frac{C}{B} = b$

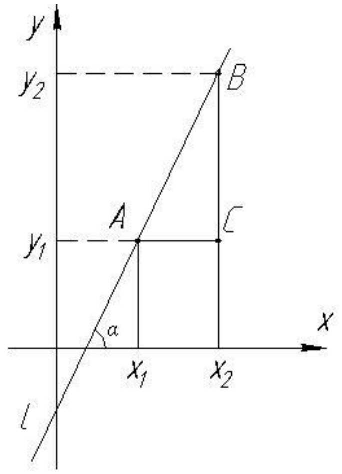
$$y = kx + b$$

OB=в – початкова координата, $k = tg\alpha = \frac{MN}{AN}$ - кутовий коефіцієнт прямої.



Якщо пряма проходить через початок координат, то $k = tg\alpha = \frac{MN}{ON} = \frac{y}{x}$

4.2.4 Рівняння прямої, що проходить через дві точки.



Зафіксуємо на прямій дві точки $A(x_1;\, y_1)$ і $B(x_2;\, y_2)$ (координати відомі).

ΔABC: $tg\alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$

Отже $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (1) - кутовий коефіцієнт прямої.

Зафіксуємо тепер точку $A(x_1;\, y_1)$, а точка $B(x;\, y)$ має поточні координати.

ΔABC: $tg\alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = k$

Отже $k = \dfrac{y - y_1}{x + -x_1} \Rightarrow y - y_1 = k(x - x_1)$ (2) - рівняння прямої, яка проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт.

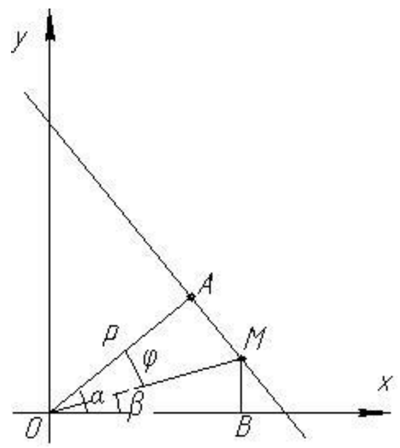
В рівняння (2) підставимо значення *к* з рівності (1)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ - рівняння прямої, що проходить через дві точки.

4.2.5 Нормальне рівняння прямої.

Нехай l - це пряма, $OA = p$ - перпендикуляр(відстань), проведений від початку координат до прямої, α - кут нахилу цього перпендикуляра до осі Ох, $M(x;\, y)$ - довільна точка прямої.



Позначимо $OM = \rho$, $\angle AOB = \alpha$, $\angle MOB = \beta$, $\angle AOM = \varphi$, $\varphi = \alpha - \beta$.

З ΔAOM: $AO = OM \cdot \cos\varphi$

$p = \rho \cdot \cos\varphi = \rho \cdot \cos(\alpha - \beta) = \rho\cos\alpha\cos\beta + \rho\sin\alpha\sin\beta$

ΔBOM: $OB = OM\cos\beta$ $\quad x = \rho \cdot \cos\beta$

$MB = OM\sin\beta$ $\quad y = \rho \cdot \sin\beta$

Тоді $p = \rho\cos\alpha + \rho\sin\alpha$

$\rho\cos\alpha + \rho\sin\alpha - p = 0$ - нормальне рівняння прямої.

Знайдемо зв'язок між загальним рівнянням прямої та нормальним рівнянням прямої:

$$\begin{cases} Ax+By+C=0, \\ x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A\mu x+B\mu y+\mu C=0, \\ x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\mu=\cos\alpha, \\ B\mu=\sin\alpha, \\ \mu C=-p. \end{cases}$$

Піднесемо до квадрату перші два рівняння і додамо почленно

$$A^2\mu^2=\cos^2\alpha$$

$$B^2\mu^2=\sin^2\alpha$$

$$\left(A^2+B^2\right)\mu^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$$

$$\left(A^2+B^2\right)\mu^2=1$$

$$\mu^2=\frac{1}{A^2+B^2}$$

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$ - нормуючий множник

Підставимо μ в рівність $A\mu x+B\mu y+\mu C=0$, отримаємо $\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$ - нормальне рівняння прямої.

З рівності $\mu C=-p$ можна зробити слідуючи висновки:

1) μ і C мають різні знаки (бо $p>0$, p - відстань);

2) в нормальному рівнянні прямої знак μ (знак перед квадратним коренем) беремо протилежний до C.

Щоб знайти відстань від точки $M_0(x_0;\, y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ необхідно:

– записати нормальне рівняння прямої;

– в це рівняння підставити координати точки, відстань від якої ми знаходимо;

– взяти одержану відповідь по модулю.

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

4.3 Взаємне розміщення прямих на площині

Нехай прямі l_1 і l_2 задані відповідними рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

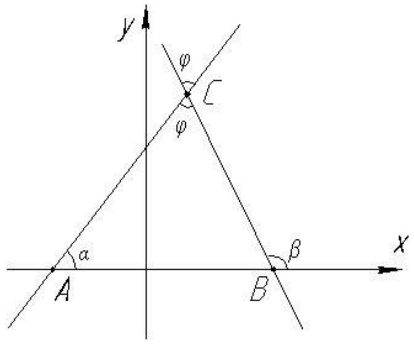
$l_1 \sim \quad y=k_1x+b_1$

$l_2 \sim \quad y=k_2x+b_2$

1) якщо $k_1\neq k_2$, то прямі перетинаються в одній точці;

2) якщо $k_1=k_2$, то прямі мають однаковий кут нахилу до осі Ox, а значить паралельні.

Доведення: φ - кут між прямими l_1 і l_2**,** $tg\beta=k_1$**,** $tg\alpha=k_2$**.**



ΔABC: β - зовнішній кут, тоді $\beta = \alpha + \varphi$, $\varphi = \beta - \alpha$

$$tg\varphi = tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta \cdot tg\alpha} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$$

Отже $tg\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$ - тангенс кута між двома прямими.

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то $\varphi = 0$, $tg0^\circ = 0 \Rightarrow$ $\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = 0 \Rightarrow \quad k_1 = k_2$.

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то $\varphi = 90^\circ \Rightarrow$ $tg\alpha$ - не існує, тоді

$$ctg\varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_1 - k_2} = 0 \quad \Rightarrow \; 1 + k_1 k_2 = 0$$

$$k_1 k_2 = -1$$

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

Контрольні запитання.

1. Виведіть відповідні рівняння прямої на площині.
2. Які умови паралельності і перпендикулярності прямих?
3. Виведіть нормальне рівняння прямої.
4. Як знайти відстань від даної точки до даної прямої?