Лекція 3. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

План

3.1. Вектори. Основні поняття. Лінійні операції над векторами.
3.2.Скалярний добуток векторів. Векторний добуток векторів. Мішаний добуток векторів.
3.3. Базис.
3.4. Ділення відрізка у заданому відношенні.

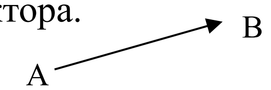
3.1. Вектори. Основні поняття. Лінійні операції над векторами.

3.1.1. Основні поняття.

Скалярні величини характеризуються числовим значенням: маса, час і т.д.

Векторні величини характеризуються числовим значенням і напрямом: швидкість, сила і т.д.

Вектор – це напрямлений відрізок: $\overline{AB}$, точка A – початок вектора, точка B – кінець вектора.



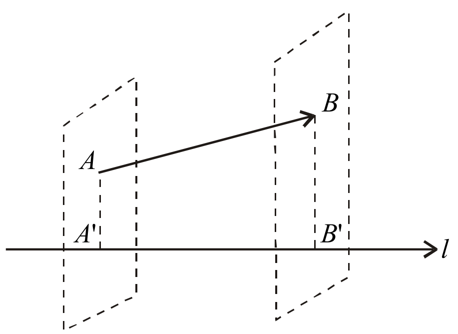
Нульовий вектор – це вектор, у якого початок і кінець співпадають: $\overline{AA} = \bar{0}$.

Довжина вектора (модуль, абсолютна величина) - це довжина відрізка, який зображає даний вектор: $\left|\overline{AB}\right| = \left|\bar{a}\right|$.

Вектори називаються **колінеарними**, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Два вектори називаються **рівними**, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені та рівні по довжині.

Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь l називається довжина $A'B'$ напрямленого відрізка $\overrightarrow{A'B'}$ на осі l.

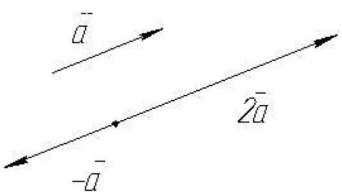


Позначається проекція вектора $\vec{AB}$ на вісь l — $np_l\vec{AB}$. З малюнка випливає формула знаходження проекції вектора на вісь:

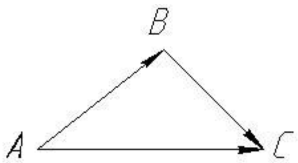
$$np_l\vec{AB} = \left|\vec{AB}\right|\cos\varphi,$$ де φ — кут між вектором і віссю.

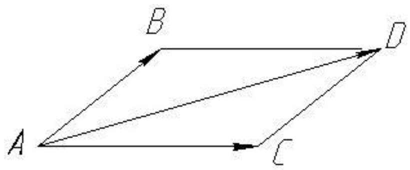
3.1.2. Дії над векторами в геометричній формі.

1) добутком вектора $\bar{a}$ на число λ називається вектор, модуль якого дорівнює $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$, а напрям співпадає з напрямом вектора $\bar{a}$, якщо $\lambda>0$ і протилежний напряму $\bar{a}$, якщо $\lambda<0$.

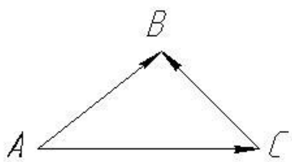


2) додавання векторів:
   - правило трикутника: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$
   - правило паралелограма: $\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{AD}$



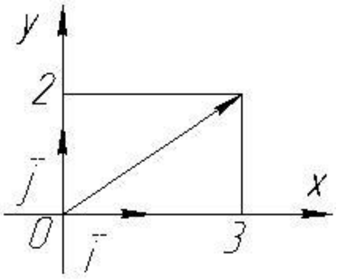


3) віднімання векторів: $\overline{AB}-\overline{AC}=\overline{CB}$



Означення. Координатами вектора називаються його проекції на осі координат.

Приклад.



$\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{j}$, де $i,\ j$ - одиничні вектори, орти.

Якщо $A(x_1;\, y_1; z_1)$ і $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$, то координати вектора $\overline{AB}$ знаходяться за формулою: $\overline{AB} = \overline{(x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1)}$ (якщо $\bar{a} = \overline{(a_1; a_2; a_3)}$, то $\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$).

Рівні вектори мають рівні координати.

Довжина вектора: $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, (якщо $\bar{a} = \overline{(a_1; a_2; a_3)}$, то $\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$).

Якщо вектори $\bar{a} = \overline{(a_1; a_2; a_3)}$ і $\bar{b} = \overline{(b_1; b_2; b_3)}$ колінеарні, то їх координати пропорційні $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$.

3.1 3. Дії над векторами, заданими своїми координатами.

Якщо $\bar{a} = \overline{(a_1; a_2; a_3)}$ і $\bar{b} = \overline{(b_1; b_2; b_3)}$, то

1) $\lambda \cdot \bar{a} = \overline{(\lambda a_1;\, \lambda a_2)}$ - множення вектора на число;

2) $\bar{a} + \bar{b} = \overline{(a_1 + b_1;\, a_2 + b_2;\, a_3 + b_3)}$ - додавання векторів;

3) $\bar{a} - \bar{b} = \overline{(a_1 - b_1;\, a_2 - b_2;\, a_3 - b_3)}$ - віднімання векторів.

Властивості операцій з векторами:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$

2) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$

3) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \lambda = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$

4) $(\lambda + \beta) \cdot \bar{a} = \lambda\bar{a} + \beta\bar{a}$

5) $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$

6) $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$

7) $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$

3.2. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

3.2.1. Скалярний добуток векторів

Означення. Скалярним добутком двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними: $\bar{a} \cdot \bar{b} = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \cos\varphi$

Якщо вектори задані координатами $\bar{a} = \overline{(a_1; a_2; a_3)}$ і $\bar{b} = \overline{(b_1; b_2; b_3)}$, то скаларний добуток дорівнює сумі добутків відповідних координат: $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Кут між векторами знаходять за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Геометричні властивості скалярного добутку:

1) $\bar{a} \perp \bar{b} \;\Leftrightarrow\; \bar{a}\cdot\bar{b} = 0$ (умова перпендикулярності векторів);

2) $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; \bar{a}\cdot\bar{b} > 0$

3) $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi \;\Leftrightarrow\; \bar{a}\cdot\bar{b} < 0$

4) $np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$

Алгебраїчні властивості скалярного добутку:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$

2) $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$

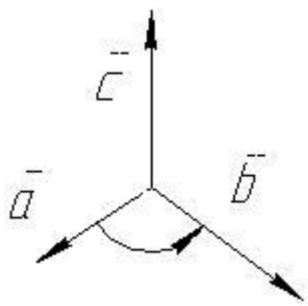
3) $(\alpha\cdot\bar{a})\cdot\bar{b} = \alpha\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})$

4) $\bar{a}\cdot\bar{a} = \overline{a^2} = |\bar{a}|^2$

3.2.2. Векторний добуток векторів

Означення. Векторним добутком векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$ (позначається $\bar{c} = \bar{a}\times\bar{b}$), який задовольняє таким умовам:

1) довжина вектора $\bar{c}$ дорівнює $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $\bar{c} = |\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$, де $\varphi = (\bar{a};\bar{b})$;
2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярний кожному з векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $\bar{c}\perp\bar{a}$; $\bar{c}\perp\bar{b}$;
3) трійка векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ - права: напрям вектора $\bar{c}$ такий, що при спостереженні з його кінця найменший кут від $\bar{a}$ до $\bar{b}$ здійснюється проти годинникової стрілки:



Властивості векторного добутку:

1) $\bar{a} \,||\, \bar{b} \;\Leftrightarrow\; \bar{a}\times\bar{b} = 0$ **(**умова колінеарності векторів**);**

2) $\bar{a}\times\bar{b} = -(\bar{b}\times\bar{a})$**;**

3) $\overline{\alpha a}\times\bar{b} = \alpha\bar{a}\times\bar{b}$**;**

4) $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}$ **;**

Якщо вектори задано їхніми координатами $\bar{a}=\overline{(a_1;a_2;a_3)}$ і $\bar{b}=\overline{(b_1;b_2;b_3)}$, то

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

Геометричний зміст векторного добутку векторів: модуль векторного добутку дорівнює площині паралелограма, побудованого на сторонах як на векторах.

3.2.3. Мішаний добуток векторів

Означення. Мішаним добутком векторів $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ упорядкованої трійки векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називається число, яке дорівнює векторному добутку $\bar{a}\times\bar{b}$, помноженому скалярно на вектор $\bar{c}$.

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$$

Якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ задано своїми координатами $\bar{a}=\overline{(a_1;a_2;a_3)}$, $\bar{b}=\overline{(b_1;b_2;b_3)}$, $\bar{c}=\overline{(c_1;\,c_2;\,c_3)}$, то їх мішаний добуток визначають за формулою

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

Властивості мішаного добутку:

1. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$.
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=-\vec{b}(\vec{a}\times\vec{c})$.

Геометричний зміст мішаного добутку векторів: модуль мішаного добутку векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах

$$V_{пар}=\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|$$

а об’єм відповідної піраміди $V_{пір}=\dfrac{1}{6}\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|$.

3.3. Базис

Означення. Лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k}$ з дійсними коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ називається довільний вектор $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_k\overrightarrow{a_k}$.

Якщо вектор поданий у вигляді лінійної комбінації деяких векторів, то кажуть, що він розкладений за цими векторами.

Означення. Вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k}$ називаються лінійно залежними, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, що $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_k\overrightarrow{a_k} = \vec{0}$ і $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_k^2 = 0$.

Якщо рівність $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_k\overrightarrow{a_k} = \vec{0}$ справджується лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$, то вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k}$ називаються лінійно незалежними.

Два колінеарні вектори – лінійно залежні, а два не колінеарні вектори – лінійно незалежні.

Три компланарні вектори – лінійно залежні, а три не компланарні вектори – лінійно незалежні. Чотири вектори в тривимірному просторі завжди лінійно залежні.

Означення. Базисом $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ векторів на площині називається упорядкована пара лінійно незалежних (неколінеарних) векторів $\overrightarrow{e_1}$ і $\overrightarrow{e_2}$.

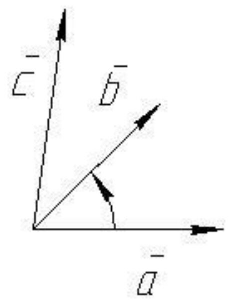
Всякий вектор $\vec{d}$ можна подати у вигляді суми $\vec{d} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}$. Числа α і β називають координатами вектора $\vec{d}$ у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ і пишуть $\vec{d} = (\alpha; \beta)$, сума $\vec{d} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}$ - розклад вектора за цим базисом.

Означення. Базисом $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ у просторі називається упорядкована трійка лінійно незалежних (некомпларних) векторів.

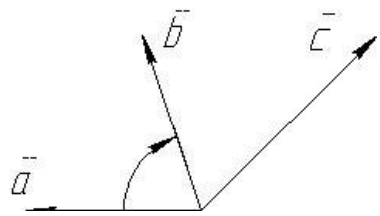
Всякий вектор $\vec{d}$ простору можна розкласти за базисом $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$: $\vec{d} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2} + \gamma\overrightarrow{e_3}$, α, β, γ називають координатами вектора $\vec{d}$ у цьому базисі пишуть $\vec{d} = (\alpha; \beta; \gamma)$.

Необхідна і достатня умова компланарності або лінійної залежності векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ виражається рівністю $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$.

Якщо $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то упорядкована трійка векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ права (мал.1), а якщо $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, то ліва (мал. 2).



мал. 1.



мал.2.

Приклад. Дано: $\bar{a} = \overline{(1; 0; 2)}$, $\bar{b} = \overline{(3; -1; 1)}$, $\bar{c} = \overline{(2; 1; 0)}$. Перевірити чи утворюють дані вектори базис. Якщо так, то знайти координати вектора $\vec{d}(2; 1; 3)$ в цьому базисі.

1) знайдемо мішаний добуток даних векторів:

$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, значить дані вектори некомпланарні, тобто утворюють базис.

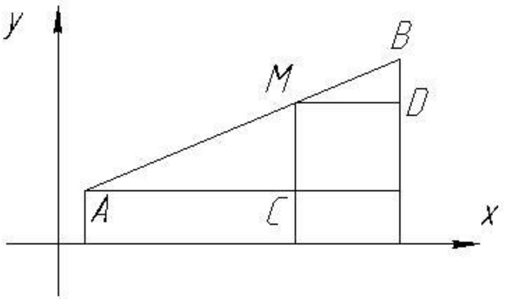
2) Виразимо вектор $\vec{d}$ через вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$: $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

$\overrightarrow{(2;\,1;\,3)} = \alpha\overrightarrow{(1;\,0;\,2)} + \beta\overrightarrow{(3;-1;\,1)} + \gamma\overrightarrow{(2;\,1;\,0)}$

Складаємо систему рівнянь $\begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma = 2, \\ 0\alpha - \beta + \gamma = 1, \\ 2\alpha + \beta + 0\gamma = 3. \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{5};\ \ \beta = -\frac{1}{3};\ \ \gamma = \frac{1}{3}$

Отже $\vec{d} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$, $\quad \vec{d} = \left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

3.4 Ділення відрізка у даному відношенні



Задані точки $A(x_1;\, y_1)$ і $B(x_2;\, y_2)$. Знайти координати точки $M(x; y)$, що лежить на прямій AB і ділить відрізок AB у відношенні $\frac{AM}{MB} = \alpha$

$$\Delta ACM \sim \Delta MDB:\ \ \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{MD} = \frac{CM}{DB} \ \Rightarrow\ \begin{cases} \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{MD} = \alpha, \\ \frac{AM}{MB} = \frac{CM}{DB} = \alpha. \end{cases} \ \Rightarrow\ \begin{cases} \frac{x - x_A}{x_B - x} = \alpha, \\ \frac{y - y_A}{y_B - y} = \alpha. \end{cases}$$

З першої рівності системи маємо:

$$x - x_A = \alpha\left(x_B - x\right)$$

$$x - \alpha x = \alpha x_B + x_A$$

$$x(1+\alpha) = x_A + \alpha\, x_B$$

$$x = \frac{x_A + \alpha\, x_B}{1+\alpha}$$

Аналогічно з другого рівняння системи знаходимо: $y = \frac{y_A + \alpha\, y_B}{1+\alpha}$

Отже $M\left(\frac{x_A + \alpha\, x_B}{1+\alpha};\ \frac{y_A + \alpha\, y_B}{1+\alpha}\right)$

Якщо $\alpha = 1$, то $x = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Контрольні запитання.

1. Що називається вектором?
2. Які вектори називаються колінеарними?
3. Які дії виконуються над векторами в геометричній формі? Пояснити на прикладах.
4. Які дії виконуються над векторами в координатній формі? Пояснити на прикладах.
5. Що називається скалярним добутком векторів?
6. Сформулювати властивості скалярного добутку векторів.
7. Що називається векторним добутком векторів?
8. Сформулювати властивості векторного добутку векторів.
9. Що називається мішаним добутком векторів?
10. Що називається базисом?
11. Які вектори називаються компланарними?
12. Як обчислити координати точки, яка ділить даний відрізок у даному відношенні?