Лекція 2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

План

2.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні поняття.
2.2. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь .
2.3. Ранг матриці.
2.4. Однорідні системи.

2.1 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні поняття

В загальному вигляді система рівнянь записується так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

де n - невідомих, m – рівнянь, $x_1; x_2; x_3 \ldots$ - невідомі, $a_{11};\ a_{12};\ a_{13} \ldots$ - коефіцієнти при невідомих, $b_1; b_2;\ b_3 \ldots$ - вільні члени. Ведемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

Система лінійних рівнянь (1) називається ***однорідною***, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і ***неоднорідною***, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Множина чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається ***впорядкованою***, якщо вказано порядок слідування цих чисел, тобто вказано, яке з них є першим, другим і т.д.

Упорядкований набір чисел $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ називається ***розв'язком системи*** (1), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ усі рівняння системи перетворюються в тотожність.

Систему рівнянь називають ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок.
Сумісна система називається ***невизначеною***, якщо вона має більше, ніж один розв'зок.

Системи лінійних рівнянь називаються ***еквівалентними***, якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків. Еквівалентні системи дістають, зокрема, внаслідок елементарних перетворень даної системи. Елементарні перетворення системи лінійних рівнянь відповідають елементарним перетворенням матриці за умови, що вони виконуються лише над рядками матриці.

2.2 Методи розв'язування системи лінійних рівнянь

1. **Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.**

Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Введемо позначення:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ - визначник матриці коефіцієнтів при невідомих,

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ – визначники, які утворені із Δ підстановкою стовпця вільних членів на місце і-го стовпця (і=1,2,3).

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок і його знаходять за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Якщо $\Delta = 0$, а одне з чисел Δ_1, Δ_2, Δ_3 не дорівнює нулю, то система не має розв'язку. При $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ система може бути несумісною або мати безліч розв'язків.

Аналогічні формули Крамера справедливі для *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими.

2. **Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.**

Метод Гауса – це метод послідовного виключення невідомих. За допомогою елементарних перетворень, систему $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ приводять до системи вигляду $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + ... + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad c_{33}x_3 + ... + c_{3n}x_n = d_3 \\ .... \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n \end{cases}$

Таку систему рівнянь називають трикутною (східчастою, трапецієподібною).

Якщо кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь, то система має єдиний розв'язок. Якщо система має рівняння виду $0 = d_n$, то вона очевидно несумісна.

3. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь.

Нехай задано систему п лінійних рівнянь з невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Введемо матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$

Тоді згідно з правилом множення матриць систему (1) можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею *X*: $A \cdot X = B$.

Якщо матриця *A* має обернену матрицю A^{-1}, то

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Ця формула називається матричним записом розв'язку системи (1). Отже, щоб розв'язати систему рівнянь (1), достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи *A*, і помножити її на матрицю з вільних членів справа.

Приклад: розв'язати матричним способом систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Вводимо матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Обчислюємо визначник матриці A: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 56 \neq 0$

Знаходимо матрицю A^{-1}, обернену до матриці A: $A^{-1} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 13 \\ 7 & 13 & -11 \\ -7 & 11 & -5 \end{pmatrix}$

Знаходимо розв'язки за формулою: $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 13 \\ 7 & 13 & -11 \\ -7 & 11 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 35-5+26 \\ 35-13-22 \\ -35-11-10 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 56 \\ 0 \\ -56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $(1; 0; -1)$

2.3 Ранг матриці

Нехай маємо матрицю розміром $m \times n$, елементами якої є числа. Вилучаючи з цієї матриці певну кількість рядків і стовпців, можна скласти визначники, які можуть як дорівнювати нулю, так і не дорівнювати нулю. Найбільший порядок таких визначників – це мінімальне з чисел m і n.

Означення. Рангом матриці A ($r(A)$, $rang(A)$) називається найбільший порядок, відмінного від нуля визначника, складеним зазначеним способом з матриці A.

Приклад: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

З даної матриці можна скласти три визначники другого порядку і шість визначників першого порядку:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $|1| = 1$, $|2| = 2$, $|3| = 3$, $|3| = 3$, $|6| = 6$, $|9| = 9$

Всі визначники другого порядку дорівнюють нулю, а жоден з визначників першого порядку не дорівнює нулю. Тому $rang(A) = 1$.

Ранг матриці не зміниться, якщо:

1) переставити місцями два рядки (стовпці);
2) помножити кожен елемент рядка (стовпця) на один і той самий, відмінний від нуля множник;
3) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

Одним із методів знаходження рангу матриці є метод одиниць та нулів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad r(A) = 3$$

Нехай задано систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Розглянемо основну матрицю A і розширену матрицю $\overline{A}$ даної системи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Теорема Кронекера – Капеллі: для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці. Якщо $r(A) = r(\overline{A}) = n$, то система має єдиний розв’язок. Якщо $r(A) = r(\overline{A}) < n$, то система має безліч розв’язків.

Приклад: знайти ранг основної і розширеної матриці для системи

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -1 & -4 \\ 3 & -16 & 0 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = r(\overline{A}) = n = 3 \Rightarrow$$ система

має єдиний розв’язок.

2.4 Однорідні системи лінійних рівнянь

Системи лінійних рівнянь називаються однорідними, якщо праві частини рівнянь дорівнюють нулю.

Однорідна система m лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Ця система завжди має нульовий розв'язок: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Ненульовий розв'язок даної системи (якщо він є) можна знайти методом Гаусса.

Якщо $m = n$ і визначник Δ системи дорівнює нулю (Δ=0), то однорідна система має безліч ненульових розв'язків.

Нехай дано систему двох однорідних лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Розв'язок такої системи можна знайти за формулами

$x = t\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, $y = -t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $z = t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, де t - довільне число.

Нехай дано систему трьох однорідних лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases}$$

Якщо $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$, то система має безліч розв'язків. Нехай у визначнику Δ існує принаймні один відмінний від нуля мінор другого порядку, наприклад, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, тоді розв'язки можна знайти за формулами $x = t\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, $y = -t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $z = t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, де t - довільне число.

Приклад. Розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ 3x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1` & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 9 - (3 - 6 - 4) = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

$$x = t\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = t \cdot (-3 - 1) = -4t \qquad y = -t\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -t \cdot (2 - 1) = -t$$

$$z = t\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = t \cdot (2 + 3) = 5t$$

Відповідь: $(-4t; -t; 5t)$

Контрольні запитання.

1. Сформулюйте методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь? Поясніть їх суть.
2. Що називається рангом матриці? Як його знайти?
3. Яка система рівнянь називається однорідною? Як знайти її розв’язки?