Лекція 1. Матриці

1.1 Основні поняття і означення

Термін «матриця» вперше було запроваджено в 1848 р. англійським математиком Дж. Дж. Сильвестром.

Матриці є корисними для запису даних, що залежать від двох категорій, наприклад: для коефіцієнтів систем лінійних рівннь.

В загальному вигляді система рівнянь записується так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

де n - невідомих, m – рівнянь, $x_1; x_2; x_3...$ - невідомі, $a_{11}; a_{12}; a_{13}...$ - коефіцієнти при невідомих, $b_1; b_2; b_3...$ - вільні члени.

Означення. Прямокутна таблиця, що складається з елементів a_{ij} $\left(i = \overline{1,...m};\ j = \overline{1,...n}\right)$ деякої множини, називається матрицею. Позначається матриця, як правило, великою латинською літерою і записується в круглих або квадратних дужках, наприклад

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці нумеруються двома індексами: перший i – означає номер рядка, другий j - означає номер стовпця. Матриця має розмір $m \times n$ (m – рядків, n - стовпців).

Матриця називається числовою, якщо її елементи a_{ij} - числа, функціональною, якщо її елементи a_{ij} - функції, векторною, якщо її елементи a_{ij} - вектори і т.д.

Дві матриці А і В називаються рівними, якщо $a_{ij} = b_{ij}$ (відповідні елементи рівні). Рівними можуть бути тільки матриці однакової розмірності.

1.2 Види матриць

1. Матриця, у якої $n=m$ називається квадратною: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

2. Якщо $m=1$, то матриця називається матрицею – рядком: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \end{pmatrix}$.

3. Якщо $n=1$, то матриця називається матрицею – стовпцем: $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

4. Квадратні матриці, у яких відмінні від нуля тільки елементи головної діагоналі, називаються діагональними: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

5. Якщо всі елементи головної діагоналі діагональної матриці рівні між собою, то така матриця називається скалярною: $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

6. Якщо елементи діагональної матриці дорівнюють одиниці, то така матриця називається одиничною: $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Матриця називається трикутною, якщо всі елементи розміщені вище (або нижче) головної діагоналі дорівнюють нулю: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

1.3 Дії над матрицями

1. Додавання матриць

Означення. Сумою двох матриць $A + B$ називається матриця C, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць A і B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сума матриць визначена тільки для матриць однакової розмірності.

2. Віднімання матриць

Означення. Різницею двох матриць A - B називається матриця C, елементи якої дорівнюють різниці відповідних елементів матриць A і B: $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Різниця матриць визначена тільки для матриць однакової розмірності.

3. Множення матриці на число

Означення. Добутком матриці A на число λ називається матриця C, елементи якої дорівнюють добутку відповідних елементів матриці A на число λ: $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Приклад: $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = A - B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}, \quad C = -2A = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -4 & 8 \\ 6 & -18 \end{pmatrix}.$$

4. Множення матриць

Означення. Матриця А називається узгодженою з матрицею В, якщо кількість стовпців матриці А дорівнює кількості рядків матриці В.

Перемножувати можна тільки узгоджені матриці.

Означення. Добутком матриць $A_{m\times n}$ і $B_{n\times k}$ називається матриця $C_{m\times k}$, у якої елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i – того рядка матриці A на відповідні елементи j - того стовпця матриці B.

$$C = C_{m\times k} = (c_{ij}), \qquad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1,\ 2, \dots, m, \quad j = 1,\ 2, \dots, k$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

тобто c_{12} - означає, що елементи першого рядка матриці A перемножуються на відповідні елементи другого стовпця матриці B.

Приклад.

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C_{2\times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

$c_{11} = 1\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + 0\cdot 3 = -3$

$c_{12} = 1\cdot 0 + (-2)\cdot(-4) + 0\cdot 2 = 8$

$c_{21} = 3\cdot 1 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot 3 = 4$

$c_{22} = 3\cdot 0 + 2\cdot(-4) + (-1)\cdot 2 = -10$.