

3. Якщо $n=1$, то матриця називається матрицею – стовпцем: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

4. Квадратні матриці, у яких відмінні від нуля тільки елементи головної діагоналі, називаються діагональними: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

5. Якщо всі елементи головної діагоналі діагональної матриці рівні між собою, то така матриця називається скалярною: $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

6. Якщо елементи діагональної матриці дорівнюють одиниці, то така матриця називається одиничною: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Матриця називається трикутною, якщо всі елементи розміщені вище (або нижче) головної діагоналі дорівнюють нулю: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

1.3. Дії над матрицями

1. Додавання матриць

Означення. Сумою двох матриць $A + B$ називається матриця C , елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць A і B : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сума матриць визначена тільки для матриць однакової розмірності.

2. Віднімання матриць

Означення. Різницею двох матриць $A - B$ називається матриця C , елементи якої дорівнюють різниці відповідних елементів матриць A і B : $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Різниця матриць визначена тільки для матриць однакової розмірності.

3. Множення матриці на число

Означення. Добутком матриці A на число λ називається матриця C , елементи якої дорівнюють добутку відповідних елементів матриці A на число λ : $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Приклад: $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = A - B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}, \quad C = -2A = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -4 & 8 \\ 6 & -18 \end{pmatrix}.$$

4. Множення матриць

Означення. Матриця A називається узгодженою з матрицею B , якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B .

Перемножувати можна тільки узгодженні матриці.

Означення. Добутком матриць $A_{m \times n}$ і $B_{n \times k}$ називається матриця $C_{m \times k}$, у якій елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i – того рядка матриці A на відповідні елементи j - того стовпця матриці B .

$$C = C_{m \times k} = (c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

тобто c_{12} - означає, що елементи першого рядка матриці A перемножуються на відповідні елементи другого стовпця матриці B .

Приклад.

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 3 = -3$$

$$c_{12} = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-4) + 0 \cdot 2 = 8$$

$$c_{21} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = 4$$

$$c_{22} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 = -10.$$

1.4. Обернена матриця

Означення. Квадратна матриця A називається невинродженою, якщо її визначник не дорівнює нулю: $\Delta \neq 0$. Якщо $\Delta = 0$, то матриця називається винродженою.

Тільки для невинроджених матриць вводиться поняття оберненої матриці.

Означення. Нехай A – квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A , якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

де A_{ij} - алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці A .

Приклад. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Спочатку треба обчислити визначник матриці, тобто перевірити, чи є матриця невинродженою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 28 + 0 - (18 + 0 - 14) = 21$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 14 = -11$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 0 = -3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 6) = 4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 9 = 5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 14) = 14$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -(-7 - 0) = 7$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 4) = 6$$

$$A^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -11 & 14 & -6 \\ 4 & -7 & 6 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -11 & 14 & -6 \\ 4 & -7 & 6 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 11+28-18 & 0+42-42 & -22+28-6 \\ -4-14+18 & 0-21-49 & 8-14+6 \\ -5+14-9 & 0+21-21 & 10+14-3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

1.5 Ранг матриці

Нехай маємо матрицю розміром $m \times n$, елементами якої є числа. Вилучаючи з цієї матриці певну кількість рядків і стовпців, можна скласти визначники, які можуть як дорівнювати нулю, так і не дорівнювати нулю. Найбільший порядок таких визначників – це мінімальне з чисел m і n .

Означення. Рангом матриці A називається найбільший порядок відмінного від нуля визначника, складеного зазначеним способом з матриці A і позначається $\text{rang } A$, $\text{rang}(A)$ або $r(A)$.

Приклад: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

З даної матриці можна скласти три визначники другого порядку і шість визначників першого порядку:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} &= 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0, \\ |1| &= 1, |2| = 2, |3| = 3, |3| = 3, |6| = 6, |9| = 9. \end{aligned}$$

Всі визначники другого порядку дорівнюють нулю, а жоден з визначників першого порядку не дорівнює нулю. Тому $\text{rang } A = 1$.

Ранг матриці не зміниться, якщо виконати елементарні перетворення:

- 1) переставити місцями два рядки (стовпці);
- 2) помножити кожен елемент рядка (стовпця) на один і той самий, відмінний від нуля множник;
- 3) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.