Розв'язання типового варіанта

Приклад 1.
Дослідити функцію $z = f(x; y)$ на екстремум і знайти найбільше й найменше значення цієї функції в замкненій області $\overline{D}$:
$z = x^2 - 6xy - 3y^3 - 2x + 6y + 6$,

$\overline{D}:\ x = 1 - y^2, \quad x = -3.$

Задача розпадається на дві частини:

а) дослідити функцію $z = x^2 - 6xy - 3y^3 - 2x + 6y + 6$ на екстремум;

б) знайти найбільше й найменше значення цієї функції в області $\overline{D}$.

Використовуючи необхідну ознаку існування екстремуму, одержуємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 6y - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -6x - 9y^2 + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 1 \\ -6(3y+1) - 9y^2 + 6 = 0; \end{cases}$$

$$-18y - \cancel{6} - 9y^2 + \cancel{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 + 2y = 0;$$
$$y_1 = 0, \quad y_2 = -2,$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = -5.$$

Точки A(1;0) і B(-5;-2) - стаціонарні.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -18y.$$
$$\Delta = 2(-18y) - (-6)^2 = -36(y+1).$$

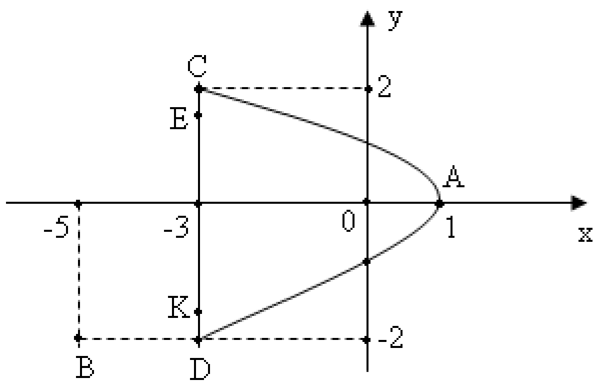
$\Delta(A) = -36 < 0$. *За* достатньою ознакою в точці А екстремуму немає.

$\Delta(B) = 36 > 0$ у точці В є екстремум.

Оскільки $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(B) > 0$, то в точці В мінімум.

$Z_{min} = Z(B) = 25 - 60 + 24 + 10 - 12 + 6 = -7.$

Для розв`язування другої частини задачі зробимо креслення області $\overline{D}$.



Оскільки точка $B \notin \overline{D}$, то її в другій частині задачі не розглядаємо.

Точка $A \in \overline{D}$, визначимо $Z(A) = 1 - 2 + 6 = 5$. Розглянемо поведінку функції на межі області $\overline{D}$.

1. Межа DAC: $x = 1 - y^2$, $y \in [-2;2]$.

$$z_{DAC} = (1-y^2)^2 - 6(1-y^2)y - 3y^3 - 2(1-y^2) + 6y + 6 = y^4 + 3y^3 + 5. \qquad \frac{dZ_{DAC}}{dy} = 4y^3 + 9y^2 = 0.$$

Стаціонарні точки $y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{9}{4} = -2{,}25$; $y_2 \notin [-2;2]$, а точка y_1 лежить на межі DAC, тобто це точка A. Визначимо Z на кінцях відрізка [-2;2]:

$Z(D) = Z_{DAC}(-2) = 16 - 24 + 5 = -3$;

$Z(C) = Z_{DAC}(2) = 16 + 24 + 5 = 45$.

2. Межа DC: $x = -3$, $y \in [-2;2]$.

$Z_{DC} = 9 + 18y - 3y^3 + 6 + 6y + 6 = -3y^3 + 24y + 21$;

$$\frac{dZ_{DC}}{dy} = -9y^2 + 24 = 0.$$

Стаціонарні точки $y = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3} \approx \pm 1{,}63 \in [-2;2]$.

На межі DC це точки $E(-3;1{,}63)$ і $K(-3;-1{,}63)$.

$Z(E) = -3(1{,}63)^3 + 24 \cdot 1{,}63 + 21 = 47{,}12$;

$Z(K) = 3(1{,}63)^3 - 24 \cdot 1{,}63 + 21 = -5{,}12$.

Випишемо отримані значення:

$Z(A) = 5$; $Z(D) = -3$;

Z(C)=45; Z(E)=47,12.

Z(К)= -5,12;

Вибираємо з них найбільше й найменше значення:

$Z_{наиб.}$=Z(E)= 47,12;

$Z_{наим.}$=Z(К)= -5,12;

Приклад 2.

Знайти умовні екстремуми функції $z = f(x;y)$, якщо $z = 5 - 3x - 4y, \quad x^2 + y^2 = 25$

Представимо функції зв'язку у вигляді $\varphi(x;y) = 0$ і складемо **функцію Лагранжа**: $L = f(x;y) + \lambda \cdot \varphi(x;y)$, де λ –множник Лагранжа.

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 25 = 0$$

$$L = 5 - 3x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

Знайдемо частинніпохідні функції Лагранжа,

$$L'_x = (5 - 3x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25))'_x = 0 - 3 - 0 + \lambda(2x + 0 - 0) = -3 + 2\lambda x$$

$$L'_y = (5 - 3x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25))'_y = 0 - 0 - 4 + \lambda(0 + 2y - 0) = -4 + 2\lambda y$$

Складемо і розв'яжемо наступну систему:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x;y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 + 2\lambda x = 0 \\ -4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$$2\lambda x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2\lambda}$$

$$2\lambda y = 4 \Rightarrow y = \frac{2}{\lambda}.$$

Підставимо

$$x = \frac{3}{2\lambda}, y = \frac{2}{\lambda}$$

у рівняння зв'язку

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2-25=0$$

$$\frac{9}{4\lambda^2}+\frac{4}{\lambda^2}=25$$

$$\frac{9}{4\lambda^2}+\frac{16}{4\lambda^2}=25$$

$$\frac{25}{4\lambda^2}=25$$

$$\lambda^2=\frac{1}{4}$$

У результаті отримуємо дві стаціонарні точки.

Якщо

$\lambda=-\frac{1}{2}$, то:

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2\lambda}=\frac{3}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=-3 \\ y=\frac{2}{\lambda}=\frac{2}{-\frac{1}{2}}=-4 \end{cases} \Rightarrow M_1(-3;-4)$$

Якщо

$\lambda=\frac{1}{2}$, то:

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2\lambda}=\frac{3}{2\cdot\frac{1}{2}}=3 \\ y=\frac{2}{\lambda}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4 \end{cases} \Rightarrow M_2(3;4)$$

Координати обох точок задовольняють рівняння

$x^2+y^2-25=0$.

Перевіримо достатню умову екстремума для знайдених стаціонарних точок

Знайдемо частинні похідні другого

$$L''_{xx}=(-3+2\lambda x)'_x=2\lambda,\quad L''_{xy}=(-3+2\lambda x)'_y=0,\quad L''_{yy}=(-4+2\lambda y)'_y=2\lambda$$

і складемо диференціал

$$d^2L=2\lambda\cdot(dx)^2+2\lambda\cdot(dy)^2$$

якщо

$$\lambda=-\frac{1}{2}:\quad d^2L=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(dx)^2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(dy)^2=-(dx)^2-(dy)^2<0$$

отже, функція набуває максимума в точці

$M_1: \quad z(-3;-4)=30$;

якщо

$\lambda=\frac{1}{2}: \quad d^2L=2\cdot\frac{1}{2}\cdot(dx)^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot(dy)^2=(dx)^2+(dy)^2>0$

отже, функція набуває мінімума в точці

$M_2: \quad z(3;4)=-20$.

Даний метод гарний,але у випадках, коли

$L''_{xy}\neq 0$,

L''_{xx}, L''_{yy} – різних знаків

відповіді не дає.

Тоді застосовується наступний спосіб.

2) Продиференціюємо рівняння зв’язку:

$\varphi'_x=(x^2+y^2-25)'_x=2x$

$\varphi'_y=(x^2+y^2-25)'_y=2y$

І складемо наступну симетричну матрицю:

$$A=\begin{pmatrix}0 & \varphi'_x & \varphi'_y\\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy}\\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2x & 2y\\ 2x & 2\lambda & 0\\ 2y & 0 & 2\lambda\end{pmatrix}$$

Якщо в стаціонарній точці

$|A|<0$, то функція набуває мінімума, якщо $|A|>0$ – то максимума.

Запишемо матрицю для значення $\lambda=-\frac{1}{2}$ і відповідної точки $M_1(-3;-4)$:

$$A_1=\begin{pmatrix}0 & -6 & -8\\ -6 & -1 & 0\\ -8 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Обчислимо визначник:

$$|A_1|=\begin{vmatrix}0 & -6 & -8\\ -6 & -1 & 0\\ -8 & 0 & -1\end{vmatrix}=-8\cdot\begin{vmatrix}-6 & -8\\ -1 & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & -6\\ -6 & -1\end{vmatrix}=-8(0-8)-(0-36)=64+36=100>0$$,

отже, функція має максимум в точці $M_1(-3;-4)$.

Аналогічно для значення

$\lambda=\frac{1}{2}$

і точки

$M_2(3;4)$:

$$A_2=\begin{pmatrix}0&6&8\\6&1&0\\8&0&1\end{pmatrix}$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}0&6&8\\6&1&0\\8&0&1\end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix}6&8\\1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&6\\6&1\end{vmatrix}=8(0-8)+(0-36)=-64-36=-100<0$$

отже, функція має мінімум в точці $M_2(3;4)$.

$z_{\min}=z(3;4)=-20,\quad z_{\max}=z(-3;-4)=30$

Умови завдань для самостійної роботи

1. **Знайти найбільше і найменше значення функції** *z=f(x,y)* **в області** *D*,**обмеженої заданими лініями:**

1. $z=x^2+xy-6x-2y+2, D: 1\le x\le 3, 1\le y\le 4.$
2. $z=x^2+4xy-y^2-5, D: x=0, y=0, y=2-x.$
3. $z=x^2+2y^2+4xy+2x+4y+2, D: 0\le x\le 2, 0\le y\le 2.$
4. $z=x^2-y^2, D: x^2+y^2\le 1.$
5. $z=x^2-xy+y^2, D: |x|\le 1, |y|\le 1.$
6. $z=5x^2-3xy+y^2, D: x=0, x=1, y=0, y=1.$
7. $z=2x^3-xy^2+y^2, D: x=0, x=2, y=-1, y=1.$
8. $z=x^2+2xy+4x-y^2, D: x+y+2=0, x=0, y=0.$
9. $z=x^2+2xy-y^2-4x, D: x=3, y=0, y=x+1.$
10. $z=5x^2-3xy+y^2+4, D: x=-1, x=1, y=-1, y=1.$
11. $z=4(x-y)-x^2-y^2, D: x+2y=4, x-2y=4, x=0{,}5.$
12. $z=x^3+y^3-3xy, D: x=0, x=2, y=-1, y=2.$
13. $z=x^2+xy-10, D: y=0, y=x^2-4.$
14. $z=\dfrac{x^2}{2}-xy, D: y=8, y=2x^2.$
15. $z=xy-2x-y, D: x=0, x=3, y=0, y=4.$
16. $z=2x^2y-x^3y-x^2y^2, D: x=0, y=0, x+y=6.$
17. $z=x^2+2xy-4x+8y, D: x=0, x=1, y=0, y=2.$
18. $z=x^2y-x+y, D: x^2+y^2\le 4.$
19. $z=x^2-y^2, D: x^2+y^2\le 1.$
20. $z=x^2+y^2-xy, D: x\le 0, y\le 0, x+y\ge -3.$

$21. z=3x^2+y^2-5x-y, D: x\ge 0, y\ge 0, x+y\ge 3.$

$22. z=x^2+2y^2-5xy, D: x=0, y=0, x+y+2=0.$

$23. z=3y^2-2xy+5x, D: x\ge 0, y\ge -1, y+x=1.$

$24. z=2y+x-xy+3, D: x\ge -1, y\ge 0, y+x\le 5.$

$25. z=x^2y-x-5, D: x+y-2=0, x=0, y=0.$

$26. z=x^2y(4-x-y), D: x=0, y=0, y=6-x.$

$27. z=4x^2+xy-10x, D: y=0, y=x^2-4.$

$28. z=\frac{y^2}{2}+xy, D: y=8, y=2x^2.$

$29. z=5(y-x)+2x^2-y^2, D: y=20, y=5x^2.$

$30. z=x2y-x+1, D: x\le 0, y\ge 0, x-y=-5.$

2 Знайти умовні екстремуми:

1 $z=xy$, якщо $x-2y=1.$

2 $z=x+y$, якщо $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}.$

3 $z=x^2y$, якщо $x+y=2.$

4 $z=x^2+xy+y^2$, якщо $2x+y=3.$

5 $z=xy$, якщо $2x+3y=5.$

6 $z=x^2-y^2$, якщо $x^2+y^2=1.$

7 $z=2x+y$, якщо $x^2+y^2=15,$

8 $z=x^2+y^2$, якщо $2x+y=5,$

9 $z=x^2+xy$, якщо $x+3y=2,$

10 $z=3-2x-y$, якщо $x^2+y^2=1,$

11 $z=x^2-y^2$, якщо $x+3y=2,$

12 $z=3x^2+2y^2$, якщо $x+y=1,$

13 $z=3x-y+2xy$, якщо $2x+y=1,$

14 $z=x+2y$, якщо $x^2+y^2=5,$

15 $z=xy$, якщо $x^2+y^2=2,$

16 $z = x^2 + y^2$, якщо $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$,

17 $z = 1 - x - 2y$, якщо $x^2 + y^2 = 5$,

18 $z = 5x^2 + 6xy$, якщо $x + 2y = 1$,

19 $z = x + 3y + 1$, якщо $x^2 + 3y^2 = 4$,

20 $z = xy + 2y^2 - 2x$, якщо $x + y = 4$,

21 $z = xy$, якщо $x + y = 1$,

22 $z = x - 3y - 3$, якщо $x^2 + y^2 = 20$,

23 $z = x^2 + 2xy + 3y^2$, якщо $x - y = 1$,

24 $z = x^2 - 2y^2$, якщо $2x + y = 1$,

25 $z = 2x^2 + 3y^2$, якщо $x + y = 5$,

26 $z = xy^2$. якщо $2x + y = 1$,

27 $z = x^2 + 2xy - 3$, якщо $x + y = 3$,

28 $z = x - y$, якщо $x^2 + y^2 = 8$,

29 $z = x^2 + y^2$, якщо $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$,

30 $z = xy$, якщо $x + y = 4$.