Завдання складається з чотирьох прикладів, кожен з яких оцінюється у 5 балів. Для зарахування завдання необхідно виконати щонайменше 3 приклади.

Умови варіантів завдань

Вказати збіжність чи розбіжність указаних числових рядів.

Варіант 1.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n^3+5n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n7^{n+1}}{n!}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^n$, г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$.

Варіант 2.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\left(\frac{n}{n+5}\right)}{n^2+7}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{\sqrt[3]{(n^3+n)^4}}$.

Варіант 3.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos^2 n}{3n-2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)^n}{(n+2)!}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+1}\right)^{n^2}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)\ln^2(4n+1)}$.

Варіант 4.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}(4n-1)}{n^3+4n-1}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{20}+17}{6^n+2}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}^n\left(\frac{1}{n+2}\right)$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}(n+1)}{(n+1)^2+1}$.

Варіант 5.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{\sqrt{2n-1}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot n^2}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^3}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{n+2}$.

Варіант 6.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{7n^4-2n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{2^n n^4}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{7n+5}\right)^n$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{(2n^2+5n)\ln^3(2n^2+5n)}$.

Варіант 7.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$, б). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!\cdot 2^{n+1}}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^3-2n+3}\right)^{-n}$, г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(n^4 2)\ln n}$.

Варіант 8.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{tg}^3\left(\frac{1}{n}\right)$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^7}{5^n}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln^3(3n+1)}}$.

Варіант 9.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{n+2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{8^n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{3n+2}\right)^n$, г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2 n}$.

Варіант 10.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+2}{n^2+n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$, г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Варіант 11.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n+2}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{-n}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Варіант 12.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}n^5\operatorname{tg}^3\left(\frac{2}{n^2}\right)$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{-2n}$, г) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$, $p>1$.

Варіант 13.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3}{5^n+2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^n+1)^2}{4n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{9n+1}\right)^{n/2}$, г) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+4}$.

Варіант 14.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^3+3n-1}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n+1}e^{-n}$, г) $\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+3^2}+\ldots$.

Варіант 15.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, г) $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\frac{1}{4\ln^2 4}+\ldots$.

Варіант 16.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(n+2)(n+5)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{10}}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{2n}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln 2n}}$.

Варіант 17.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{\sqrt[3]{n^7+3}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{\ln 3n}}$.

Варіант 18.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n$, б) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\ldots$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Варіант 19.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$, г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

Варіант 20.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n n^4$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-2n+2}{6n^2-n-3}\right)^n$, г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln n}$.

Варіант 21.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2n+3}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{n^2}+1}{3^{n^2}+1}\right)^n$, г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^3 n}$.

Варіант 22.

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{6^n}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{2n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^n$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}^2 n}{n^2+1}$.

Варіант 23.

а) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{4^n}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{4n-1}\right)^n$, г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$.

Варіант 24.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin n}{n(n^2+3)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(n+1)!}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+4}\right)^{n^2}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{\sqrt[3]{(n^3+n)^4}}$.

Варіант 25.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n+3}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n+2}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+1}\right)^{n^2}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)\ln^2(4n+1)}$.

Варіант
26.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{\sqrt{2n-1}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg^n\left(\frac{1}{n+5}\right)$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}(n+1)}{(n+1)^2+1}$.

Варіант 27.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{5n^4-2n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3^n+1\right)^2}{9n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^3}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{n+2}$.

Варіант 28.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$, б). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\left(\sqrt{4}\right)^n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^3-2n+3}\right)^{-n}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{\left(2n^2+5n\right)\ln^3\left(2n^2+5n\right)}$.

Варіант 29.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,tg^4\left(\frac{1}{n}\right)$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{7^n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$, г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{\left(n^4 2\right)\ln n}$.

Варіант 30.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{n+5}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^{10}}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{3n+2}\right)^n$, г) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$, $p>1$.

Приклад розв'язання типового варіанта завдання

Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^5+3n^4+6}}{2n^5-7n+8}$

Розв'язання.

Використовуємо граничну форму ознаки порівняння.

Для порівняння візьмемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^5}}{n^5}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5+3n^4+6}}{2n^5-7n+8}\cdot\frac{\sqrt{n^5}}{1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5}\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{6}{n^5}}\cdot\sqrt{n^5}}{n^5\left(2-\frac{7}{n^4}+\frac{8}{n^5}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{6}{n^5}}}{2-\frac{7}{n^4}+\frac{8}{n^5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+0+0}}{2-0+0}=\frac{1}{2}.$$

Оскільки $\frac{1}{2}\neq 0$ i $\frac{1}{2}\neq\infty$, то зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ $\left(p=\frac{5}{2}>1\right)$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^5+3n^4+6}}{2n^5-7n+8}$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$

Розв’язання.

Використовуємо ознаку Д’Аламбера.

$$U_n=\frac{n^3}{(n+1)!};\ U_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{((n+1)+1)!}=\frac{(n+1)^3}{(n+2)!};$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{(n+1)^3\ (n+1)!}{(n+2)!\ n^3}=\frac{(n+1)^3}{n^3}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots(n+1)(n+2)}=$$

$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n+2}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n+2}.$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=1\cdot0=0$, а оскільки $0<1$, то за ознакою Даламбера даний ряд збігається.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

Розв’язання.

Використовуємо радикальну ознаку Коші.

$$U_n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}; \quad \sqrt[n]{U_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{2}\cdot e \approx \frac{2{,}718}{2} > 1,$$

тоді за радикальною ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ розбігається.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2n+1)^3\ln(3n-1)}$.

Розв'язання.

Використовуємо граничну форму ознаки порівняння й інтегральну ознаку Коші, тобто

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2n+1)^3\ln(3n-1)}$ порівнюємо з рядом (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}$, тому що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(3n-1)\ln(3n-1)}{(2n+1)^3\ln(3n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 n\left(3-\frac{1}{n}\right)}{n^3\left(2+\frac{1}{n}\right)^3} =$$

$$= \frac{3}{8} \neq 0, \ \frac{3}{8} \neq \infty.$$

Зауважимо, що послідовність $\left\{\frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}\right\}$ спадає, тоді до ряду (2) застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{(3x-1)\ln(3x-1)}dx = \left\{\begin{aligned}&\ln(3x-1)=t\\ &\frac{3dx}{3x-1}=dt\end{aligned}\right\} = \int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{3t} = \frac{1}{3}\ln|t|\Big|_{\ln 2}^{+\infty} = +\infty.$$

Оскільки інтеграл розбігається, то розбігається ряд (2), а з розбіжності ряду (2) випливає розбіжність ряду (1).