Міністерство освіти і науки України

Сумський державний університет

4039 ЗБІРНИК ЗАДАЧ
із математики

«Математична олімпіада-2015»

(за матеріалами другого етапу олімпіади з математики
серед студентів вищих технічних навчальних закладів України)

Суми
Сумський державний університет
2016

Збірник задач із математики «Математична олімпіада-2015» (за матеріалами другого етапу олімпіади з математики серед студентів вищих технічних навчальних закладів України) / укладачі: В. В. Ніколенко, В. О. Ячменьов. – Суми : Сумський державний університет, 2016. – 36 с.

Кафедра математичного аналізу і методів оптимізації

Передмова

У травні 2015 року в СумДУ на базі кафедри математичного аналізу і методів оптимізації відбувся другий етап олімпіади серед студентів технічних вищих навчальних закладів України з навчальної дисципліни «Математика».

У ній взяли участь 62 студенти різних курсів 25 вищих навчальних закладів. Делегації представили інститути та університети з високим рівнем математичної підготовленості: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Харківський національний університет радіоелектроніки, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Київський національний університет будівництва і архітектури, Національний університет Державної податкової служби України, Ірпінь, Придніпровська державна академія будівництва та архітектури.
Полтавська державна аграрна академія та ін.

Переможцями олімпіади в офіційному заліку стали:

Категорія М: перше місце – Михайловський Володимир Віталійович, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»; друге місце – Лук'янихін Олег Вадимович, Сумський державний університет; третє – Мац Владислав Ігорович, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут».

Категорія Т: перше місце – Колеснік Олександр Валерійович, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»; друге місце – Фоменко Володимир Андрійович, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»; третє – Бабенко Михайло Павлович, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут».

Категорія С: друге місце – Ярошевський Сергій Євгенович, Придніпровська державна академія будівництва та архітектури; третє – Дубенков Віктор Павлович, Національний університет Державної податкової служби України, Ірпінь; третє – Островна Бажена Вадимівна, Київський національний університет будівництва і архітектури.

До вашої уваги збірник задач, що вміщує задачі олімпіади та їх розв'язки. Цей збірник буде корисним у роботі математичних гуртків, для школярів і студентів, які цікавляться математикою.

II етап Всеукраїнської

студентської олімпіади з математики

(Суми, травень 2015 р.)

Категорія М

1. Послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ дійсних чисел $a_n,\ b_n$ такі, що $0 < a_n < b_n < a_{n+1}$ для довільних натуральних n. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}\right).$$

2. Знайти найменший об'єм тіла, обмеженого координатними площинами і площиною, дотичною до еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

3. Нехай A, B, C, D – матриці розмірності $(n \times n)$ такі, що $AD^T - BC^T = E$, де E – одинична матриця, а матриці AB^T і CD^T – симетричні. Доведіть, що $A^TD - C^TB = E$.

4. Знайти всі неперервні функції $f\colon R \to R$, що задовольняють рівняння

$$3 \cdot f(2x+1) = f(x) + 5x.$$

5. Знайти всі $y(x) \in C^2[0,1]$, що задовольняють диференціальне рівняння

$$y'' = (x^2+1) \cdot y \cdot exp\left(y \cdot \sqrt[2015]{x}\right)$$

за умови, що $y(0) = y(1) = 0$.

6. Нехай $f_1, \dots, f_n$ – лінійно незалежна система неперервно диференційованих на відрізку $[0,1]$ функцій, тобто $f_i \in C^1[0,1],\ i = \overline{1,n}$. Довести, що серед похідних $f'_1, \dots, f'_n$ знайдуться $(n-1)$ лінійно незалежних функцій.

7. Нехай $f(x) \in C^1(R)$. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n.$$

Категорія М

Розв'язування

1. Послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ дійсних чисел $a_n,\ b_n$ такі, що $0 < a_n < b_n < a_{n+1}$ для довільних натуральних n. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}\right).$$

Розв'язання

Усі члени даного ряду додатні, оскільки

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}=\frac{b_n-a_n}{a_n b_n}>0.$$

Розглянемо частинні суми

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}\right)$$

і покажемо, що вони обмежені.

Дійсно,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}\right)=\frac{1}{a_1}-\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{a_2}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{b_{N-1}}-\frac{1}{a_N}\right)-\frac{1}{b_N}<\frac{1}{a_1}\ ,$$

$\forall n \in N$.

Звідси випливає збіжність даного ряду.

2. Знайти найменший об’єм тіла, обмеженого координатними площинами і площиною, дотичною до еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Розв’язання

Унаслідок симетрії розглянемо перший октант, узявши $a>0,\ b>0,\ c>0.$

Нехай $M(x_0,y_0,z_0)$ – точка дотику.

Вектор нормалі до дотичної площини в точці дотику має вигляд

$$\vec{u}=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right).$$

Рівняння дотичної площини в цій точці

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$

або

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=0.$$

Тоді об’єм одержаного тетраедра дорівнює

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{x_0} \cdot \frac{b^2}{y_0} \cdot \frac{c^2}{z_0} \Rightarrow$$

$$V^2(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{36} a^2 b^2 c^2 \left(\frac{{x_0}^2}{a^2} \frac{{y_0}^2}{b^2} \frac{{z_0}^2}{c^2} \right)^{-1} \geq$$

$$\geq \frac{1}{36} a^2 b^2 c^2 \frac{3^3}{\left(\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} + \frac{{z_0}^2}{c^2} \right)^3} = \frac{3}{4} a^2 b^2 c^2 .$$

Отже, $V_0(x_0, y_0, z_0) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} abc.$

Рівність відбудеться, коли

$$\frac{{x_0}^2}{a^2} = \frac{{y_0}^2}{b^2} = \frac{{z_0}^2}{c^2} = \frac{1}{3},$$

тобто якщо

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} a; \quad y_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} b; \quad z_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} c.$$

Відповідь: $V = \frac{\sqrt{3}}{2} abc.$

3. Нехай A, B, C, D – матриці розмірності $(n \times n)$ такі, що $AD^T - BC^T = E$, де E – одинична матриця, а матриці AB^T і CD^T – симетричні. Довести, що $A^T D - C^T B = E$.

Розв'язання

Використовуючи той факт, що симетрична матриця дорівнює своїй транспонованій, маємо

$$AB^T - BA^T = 0,$$

$$CD^T - DC^T = 0,$$

$$DA^T - CB^T = E,$$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD^T - BC^T & -AB^T + BA^T \\ CD^T - DC^T & -CB^T + DA^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \Rightarrow A^T D - C^T B = E.$$

4. Знайти всі неперервні функції $f\colon R \to R$, що задовольняють рівняння

$$3 \cdot f(2x+1) = f(x) + 5x.$$

Розв'язання

Будемо шукати розв'язок у вигляді лінійної функції з невизначеними коефіцієнтами.

Нехай $f(x) = a_0 + a_1 x$. Тоді $f(2x+1) = a_0 + a_1(2x+1)$, отже,

$$3(a_0 + a_1(2x+1)) = a_0 + a_1 x + 5x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти за однакових степенів x, маємо

$$\begin{cases} 6a_1 = a_1 + 5, \\ 3a_0 + 3a_1 = a_{0,} \end{cases}$$

$$\text{або} \quad a_1 = 1; \;\; a_0 = -3/2.$$

Отже, $f(x) = -\frac{3}{2} + x$.

Доведемо, що іншого розв’язку не існує.

Нехай $g(x) = f(x) - f_1(x)$.

Оскільки

$$3f(2x+1) = f(x) + 5x,$$

$$3f_1(2x+1) = f_1(x) + 5x,$$

$$3g(2x+1) = g(x).$$

Розв’яжемо рівняння $3g(2x+1) = g(x)$.

Замінимо x на $\frac{x-1}{2}$.

В одержаному рівнянні знову замінимо x на $\frac{x-1}{2}$:

$$g\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{3} g\left(\frac{x-3}{2^2}\right) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3^2} g\left(\frac{x-2^2+1}{2^2}\right).$$

Продовжуючи подібним чином, у результаті матимемо:

$$g(x) = \frac{1}{3^n} g\left(\frac{x-2^n+1}{2^n}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Унаслідок неперервності $g(x)$ для довільного x

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{x-2^n+1}{2^n}\right) = g(-1) \Rightarrow g(x) = 0.$$

5. Знайти всі $y(x) \in C^2[0,1]$, що задовольняють диференціальне рівняння

$$y'' = (x^2+1) \cdot y \cdot exp\left(y \cdot \sqrt[2015]{x}\right)$$

за умови, що $y(0) = y(1) = 0$.

Розв’язання

Нехай $y(x)$ – довільний розв’язок даної крайової задачі. Оскільки функція диференційована, то внаслідок неперервності набуває на $[0;\ 1]$ своїх найбільшого і найменшого значень.

Якщо $\exists\ x \in [0;1]$: $y(x) > 0$, то $\exists \xi \in (0;1)$: $y(\xi) = M > 0$, ξ – абсциса точки локального максимуму.

Але $y''(\xi) > 0$ згідно з рівнянням. Маємо суперечність.

Таким чином, $M \le 0$.

Аналогічно доводиться, що $m \ge 0$.

Відповідь: $y \equiv 0$.

6. Нехай $f_1, \dots, f_n$ – лінійно незалежна система неперервно диференційованих на відрізку $[0,1]$ функцій, тобто $f_i \in C^1[0,1]$, $i = \overline{1,n}$. Довести, що серед похідних $f'_1, \dots, f'_n$ знайдуться $(n-1)$ лінійно незалежних функцій.

Розв'язання

$f'_1, \dots, f'_n$ – лінійно залежні (в протилежному разі все зрозуміло).

Нехай

$$f'_n = C_1 f_1' + \dots + C_{n-1} f_{n-1}' .$$

Тоді

$$f_n = C_1 f_1 + \dots + C_{n-1} f_{n-1} + C, \text{ де } C \neq 0 \qquad (1)$$

унаслідок лінійно-незалежної системи $\{f_i\}$, $i = \overline{1,n}$.

Покажемо, що $\{f'_k\}$, $k=\overline{1,n-1}$ – лінійно незалежні.

Якщо

$$a_1 f_1' + \dots + a_{n-1} f'_{n-1} = 0,$$

То, інтегруючи, одержимо

$$a_1 f_1 + \dots + a_{n-1} f_{n-1} + a = 0,\ a = const\ . \qquad (2)$$

Звідси, помноживши (1) на a, (2) – на c і віднявши, матимемо

$$(ac_1 - ca_1) f_1 + \dots + (ac_{n-1} - ca_{n-1}) f_{n-1} = a f_n.$$

Отже, $a = 0$, тоді й $a_k = 0$, якщо $1 \le k \le n-1$.

7. Нехай $f(x) \in C^1(R)$. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n.$$

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right) - f(a) + f(a)}{f(a)}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right) - f(a)}{f(a)}\right)^n =$$

$$= \{1^{\infty}\} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}}\right)^{\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\cdot n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{f(a)}} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

II етап Всеукраїнської

студентської олімпіади з математики

(Суми, травень 2015 р.)

Категорія С

1. Обчислити визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & a & -1 & \cdots & 0 \\ x^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Знайти всі неперервні функції $f\colon R \to R$, що задовольняють рівняння

$$3 \cdot f(2x+1) = f(x) + 5x.$$

3. Із прирічного міста *A* потрібно направити вантаж до пункту *B*, який знаходиться на d_1 кілометрів нижче по річці й за d_2 кілометрів від берега. Під яким кутом необхідно провести шосе з пункту В до річки, щоб доставка вантажу з міста *A* до пункту *B* була дешевшою, якщо тариф по річці вдвічі менший, ніж по шосе?

4. Довести, що

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}$$

не залежить від величини α.

5. Знайти

$$\frac{1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\frac{\pi^{12}}{13!}+\cdots}{\frac{1}{3!}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^8}{11!}+\frac{\pi^{12}}{15!}+\cdots}.$$

6. Довести справедливість нерівності

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

де α, β, γ – внутрішні кути деякого трикутника.

7. Записати рівняння дотичної до графіка функції

$$f(x) = (6x+7)^{\frac{3}{2}} - 9x + 4,$$

якщо відомо, що на цій дотичній немає точок із рівними координатами.

Категорія С

Розв'язування

1. Обчислити визначник

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & a & -1 & \cdots & 0 \\ x^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Додаємо перший стовпчик до другого, одержуємо

$$\Delta_n=(x+a)\Delta_{n-1} \Rightarrow \Delta_n=(x+a)^n .$$

2. Знайти всі неперервні функції $f\colon R \to R$, що задовольняють рівняння

$$3 \cdot f(2x+1) = f(x) + 5x.$$

Розв'язання

Будемо шукати розв'язок у вигляді лінійної функції з невизначеними коефіцієнтами.

Нехай $f(x) = a_0 + a_1 x$.

Тоді $f(2x+1) = a_0 + a_1(2x+1)$. Отже,

$$3(a_0 + a_1(2x+1)) = a_0 + a_1 x + 5x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти за однакових степенів x, маємо

$$\begin{cases} 6a_1 = a_1 + 5, \\ 3a_0 + 3a_1 = a_0, \end{cases}$$

$$\text{або} \quad a_1 = 1; \ \ a_0 = -3/2.$$

Отже, $f(x) = -\frac{3}{2} + x$.

Доведемо, що іншого розв'язку не існує.

Нехай $g(x) = f(x) - f_1(x)$.

Оскільки

$$3f(2x+1) = f(x) + 5x \,,$$

$$3f_1(2x+1) = f_1(x) + 5x \,,$$

$$3g(2x+1) = g(x) \,.$$

Розв'яжемо рівняння $3g(2x+1) = g(x)$.

Замінимо x на $\frac{x-1}{2}$.

В одержаному рівнянні знову замінимо x на $\frac{x-1}{2}$:

$$g\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{3} g\left(\frac{x-3}{2^2}\right) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3^2} g\left(\frac{x-2^2+1}{2^2}\right).$$

Продовжуючи подібним чином, у результаті маємо

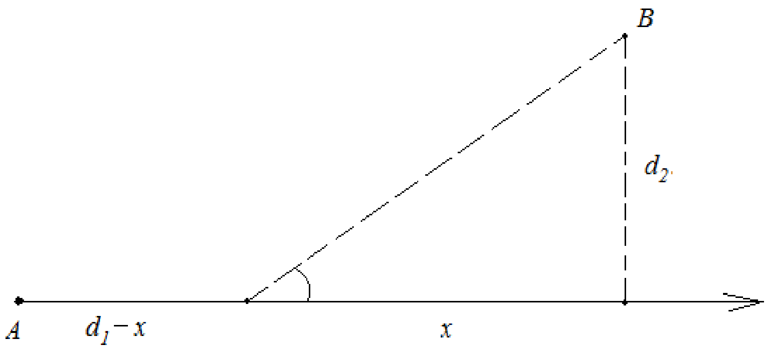
$$g(x) = \frac{1}{3^n} g\left(\frac{x - 2^n + 1}{2^n}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Унаслідок неперервності $g(x)$ для довільного x

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{x - 2^n + 1}{2^n}\right) = g(-1) \;\Rightarrow g(x) = 0.$$

3. Із прирічного міста A потрібно направити вантаж до пункту B, який знаходиться на d_1 кілометрів нижче по річці й за d_2 кілометрів від берега. Під яким кутом необхідно провести шосе з пункту В до річки, щоб доставка вантажу з міста A до пункту B була дешевшою, якщо тариф по річці вдвічі менший, ніж по шосе?

Розв'язання



Нехай $AC = d_1$. Тоді функція цілі має вигляд

$f(x) = d_1 - x + 2\sqrt{x^2 + d^2},\ x \in [0, d_1]$.

Стаціонарна точка $x = \frac{d_2}{\sqrt{3}}$.

Якщо $\dfrac{d_2}{\sqrt{3}} \in [0, d_1]$, то $d_2 < d_1\sqrt{3}$,

$$tg\,\varphi = \frac{d_2}{x} = \sqrt{3}, \qquad \varphi = 60^0.$$

Якщо $d > d_1\sqrt{3}$, то оскільки $f(x)$ спадає на $[0, d_1]$, то найменшого значення вона набуває при $x = d_1$.

Отже, дорогу потрібно покласти напряму з пункту A в пункт B під кутом $\varphi = arctg\,\frac{d_2}{d_1}$.

4. Довести, що

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$$

не залежить від величини α.

Розв'язання

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} =$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = I_1 + I_2 .$$

У першому інтегралі зробимо заміну $x = \frac{1}{y}$.

Тоді $\left\{dx = -\frac{dy}{y^2}\right\}$.

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+y^{-\alpha})}.$$

Звідси

$$I_1 + I_2 = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^{\alpha}} + \frac{x^{\alpha}}{1+x^{\alpha}}\right) \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

що не залежить від α.

5. Знайти

$$\frac{1 + \frac{\pi^4}{5!} + \frac{\pi^8}{9!} + \frac{\pi^{12}}{13!} + \cdots}{\frac{1}{3!} + \frac{\pi^4}{7!} + \frac{\pi^8}{11!} + \frac{\pi^{12}}{15!} + \cdots}.$$

Розв’язання

$$\pi + \frac{\pi^5}{5!} + \frac{\pi^9}{9!} + \frac{\pi^{13}}{13!} + \cdots = \pi S,$$

$$\frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^7}{7!} + \frac{\pi^{11}}{11!} + \frac{\pi^{15}}{15!} + \cdots = \pi^3 Q,$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sin x = \pi S - \pi^3 Q,$$

$$\pi S = \pi^3 Q, \quad \frac{S}{Q} = \pi^2.$$

6. Довести справедливість нерівності

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

де α, β, γ – внутрішні кути деякого трикутника.

Розв’язання

Розглянемо функцію $f(x) = \sin x$, що задана на відрізку $[0, \pi]$.

Оскільки $f''(x) = \sin x$, звідси випливає, $f''(x) < 0$ для $x \in (0, \pi)$, то f вігнута на $[0, \pi]$. Далі використаємо нерівність Енсена для вігнутих функцій

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(x_i),$$

$$\text{де } x_i \ge 0 \text{ і } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Тоді

$$f\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{3}\right) \ge \frac{1}{3} f(\alpha) + \frac{1}{3} f(\beta) + \frac{1}{3} f(\gamma),$$

або в нашому випадку

$$\sin\frac{\pi}{3} \ge \frac{1}{3}\sin\alpha + \frac{1}{3}\sin\beta + \frac{1}{3}\sin\gamma.$$

Звідки одержуємо

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

7. Записати рівняння дотичної до графіка функції

$$f(x) = (6x+7)^{\frac{3}{2}} - 9x + 4,$$

якщо відомо, що на цій дотичній немає точок з рівними координатами.

Розв'язання

Оскільки на дотичній немає жодної точки з рівними координатами, то вона не перетинає пряму $y = x$, тобто паралельна їй.

Оскільки рівняння дотичної має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

то із умови задачі випливає $f'(x_0) = 1.$

У задачі прийдемо до рівняння

$$\frac{3}{2}(6x+7)^{\frac{1}{2}} \cdot 6 - 9 = 1,$$

$$9(6x+7)^{\frac{1}{2}} = 10,$$

$$6x + 7 = \frac{100}{81},$$

$$6x = -\frac{467}{81}.$$

Отже, $x_0 = -\frac{467}{486}$ – точка дотику.

Тоді рівняння дотичної

$$y = x + \frac{6269}{162}.$$

II етап Всеукраїнської

студентської олімпіади з математики

(Суми, травень 2015 р.)

Категорія Т

1. Обчислити визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & a & -1 & \cdots & 0 \\ x^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

2. Обчислити суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n(2n^2+n+5)}{n!}.$$

3. Дослідити на збіжність

$$\int_0^{\infty} \sin x\,(\sin x^2)dx.$$

4. Знайти всі пари комплексних чисел (z_1, z_2), що задовольняють такі умови:

1) $|z_1| = |z_2| = r$,

2) $\frac{z_1+z_2}{z_1 z_2 - 1} \in R$.

5. Радіуси двох кіл відповідно дорівнюють 1 і 3, а відстань між центрами кіл – 10. Знайти геометричне місце середин відрізків, що з'єднують точки даних кіл.

6. Нехай $y_1,\ y_2,\ y_3$ – розв'язки на всій осі диференціального рівняння

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

такі, що для всіх x: $y_1^2(x) + y_2^2(x) + y_3^2(x) = 1$.

Нехай $f(x) = \left(y'_1(x)\right)^2 + \left(y'_2(x)\right)^2 + \left(y'_3(x)\right)^2$.

Знайти сталі A і B такі, що $f(x)$ є розв'язком диференціального рівняння

$y' + Ap(x)y = Br(x)$.

7. Нехай функція $f: [0,1] \to R$ і $g: [0,1] \to R$ зростають на проміжку $[0,1]$. Довести, що

$\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx \leq \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Категорія Т

Розв'язування

1. Обчислити визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & a & -1 & \cdots & 0 \\ x^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Розв'язання

Додаємо перший стовпчик до другого, одержуємо:

$\Delta_n = (x+a)\Delta_{n-1}$.

Відповідь: $\Delta_n = (x+a)^n$.

2. Обчислити суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n(2n^2+n+5)}{n!}.$$

Розв'язання

Розглянемо такий степеневий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n(2n^2+n+5)}{n!}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}+5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Обчислимо кожну із цих трьох сум:

а) $S_1(x)=5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=5e^x.$

б) $S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=xe^x.$

в) $S_3(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(n-1)!}$

$$=2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!}=2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!}.$$

Тоді

$$\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\,x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{(n+1)\,x^n}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=xe^x.$$

$(xe^x)'=e^x+xe^x=(x+1)e^x.$

Звідси випливає, що

$S_3(x)=2x(x+1)e^x.$

$$S(x)=S_1(x)+S_2(x)+S_3(x)=5e^x+2x(x+1)e^x+xe^x$$

$$=(5+3x+2x^2)e^x.$$

Відповідь: $S(5)=70e^5.$

3. Дослідити на збіжність

$$\int_0^\infty \sin x\,(\sin x^2)dx.$$

Розв'язання

Збіжність інтеграла не зміниться, якщо замінити нижню границю на 1. Інтегруємо частинами $(\beta \to \infty)$:

$$\int_0^\beta \sin x\,(\sin x^2)dx = \int_1^\beta \frac{\sin x}{2x}\sin(x^2)\ (2xdx) =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \dfrac{\sin x}{2x}; & dV = \sin(x^2)\,2xdx \\ du = \dfrac{2xcos\ x - 2\sin x}{4x^2}dx\ ; & V = -cosx^2 \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{\sin x}{2x}cosx^2\Big|_1^\beta + \int_1^\beta \left(\frac{\cos x}{2x} - \frac{\sin x}{2x^2}\right)cosx^2\ dx.$$

Зауважимо, що

$$\frac{\sin\beta}{2\beta}cos\beta^2 \to 0\ (\beta \to \infty), a\ \ \frac{\sin 1}{2}cos1 - величина\ обмежена.$$

Інтеграл $\int_1^\infty \frac{\sin x}{2x^2}cosx^2\ dx$ абсолютно збіжний за ознакою порівняння з $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$.

Залишилося розглянути

$$\int_1^\beta \frac{\cos x}{2x} cosx^2\, dx = \int_1^\beta \frac{\cos x}{4x^2} cosx^2 (2xdx) =$$

$$= \frac{\cos x}{4x^2} sinx^2 \Big|_1^\beta - \int_1^\beta \frac{2cosx - xsin\, x}{4x^3} sinx^2\, dx.$$

$\frac{\cos\beta}{4\beta^2} sin\beta^2 \to 0 \ \ (\beta \to \infty),$

а останній збігається абсолютно за ознакою порівняння.

Відповідь: інтеграл збігається.

4. Знайти всі пари комплексних чисел (z_1, z_2), що задовольняють такі умови:

1) $|z_1| = |z_2| = r,$

2) $\frac{z_1+z_2}{z_1z_2-1} \in R$.

Розв'язання

Оскільки

$\frac{z_1+z_2}{z_1z_2-1} \in R \Rightarrow \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{\overline{z_1}\,\overline{z_2}-1} = \frac{z_1+z_2}{z_1z_2-1},$

$|z_1|^2 z_2 + |z_2{}^2| z_1 - \overline{z_1} - \overline{z_2} = |z_1|^2 z_2 + |z_2{}^2| z_1 - z_1 - z_2,$

$\Longrightarrow\ z_1 + z_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2}\ \Rightarrow\ z_1 + z_2 \in R.$

Тому або $z_1 = -z_2 = z \in C$, при цьому $z_1 z_2 = -z^2 \neq 1$, або $z_1 + z_2 \neq\ 0$ і тоді $z_1 z_2 \in R$ (з умови 2).

Припускаючи в останньому випадку, що

$z_1 = a + iy_1, \;\; z_2 = b + iy_2,$

знаходимо $y_1 = -y_2 = y$ отже,

$R \ni z_1 z_2 = (ab + y^2) - iy(b - a) \Rightarrow y(b - a) = 0,$

що приводить до пари $z_2 = -\overline{z_2}$.

Якщо $r = 1$ потрібно вилучити із загального розв'язку $\left(e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}\right), \; \varphi \in [0, \; 2\pi]$, оскільки $z_1 z_2 \neq 1$.

Відповідь: $(z, -z)$, $(z, \overline{z})$.

5. Радіуси двох кіл відповідно дорівнюють 1 і 3, а відстань між центрами кіл – 10. Знайти геометричне місце середин відрізків, щоі з'єднують точки даних кіл.

Розв'язання

Нехай центри кіл симетричні відносно початку координат і належать осі абсцис.

Параметричні рівняння кіл:

$\begin{cases} x_1 = -5 + \cos t_{1,} \\ y_1 = \sin t_{1,} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 5 + 3\cos t_{2,} \\ y_1 = 3\sin t_{2.} \end{cases}$

Для точок $(x; \; y)$, які є серединою відрізка, що з'єднує точки $(x_1; \; y_1)$ і $(x_2\,; \; y_2)$, маємо

$$x = \frac{\cos t_1 + 3\cos t_2}{2}, \qquad y = \frac{\sin t_1 + 3\sin t_2}{2}.$$

Якщо зафіксувати t_2, то при зміні t_1 від 0 до 2π точка $(x; \; y)$ описуватиме коло радіуса $\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t_1 + const1, \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t_2 + const2. \end{cases}$$

Якщо ж зафіксувати t_1, то при зміні t_2 від 0 до 2π точка $(x;\ y)$ буде рухатися по колу радіуса $r = \frac{3}{2}$ з початком у центрі координат.

Коло радіуса $\frac{1}{2}$ буде при цьому «замітати» кільце з внутрішнім радіусом $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ і зовнішнім радіусом $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$.

Відповідь: ГМТ є кільцем, центр якого – середина відрізка, що з’єднує центри кіл, а внутрішній і зовнішній радіуси відповідно дорівнюють 1 і 2.

6. Нехай $y_1,\ y_2,\ y_3$ – розв’язки на всій осі диференціального рівняння

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

такі, що для всіх x

$y_1^2(x) + y_2^2(x) + y_3^2(x) = 1.$

Нехай $f(x) = \left(y'_1(x)\right)^2 + \left(y'_2(x)\right)^2 + \left(y'_3(x)\right)^2.$

Знайти сталі A і B такі, що $f(x)$ є розв’язком диференціального рівняння $y' + Ap(x)y = Br(x)$.

Розв’язання

За умовою y_i як мінімум тричі диференційована і

$$\sum y_i^2 = 1, \quad \sum \left(y'_i\right)^2 = f(x).$$

Диференціюючи, одержимо

$$2\sum y_i y'_i = 0, \qquad 2 \cdot \sum y'_i y''_i = f'(x)$$

звідси

$$\sum y_i y''_i + \sum \left(y'_i\right)^2 = 0.$$

Тому

$$\sum y_i y''_i = -f.$$

Звідси

$\sum y'_i y''_i + \sum y_i y'''_i = -f',$

$$\frac{f'}{2} + \sum y_i y'''_i = -f', \quad \sum y_i y'''_i = -\frac{3}{2} f'.$$

Помножимо кожну з рівностей

$$y'''_i + p y''_i + q y'_i + r y_i = 0$$

на y_i і додавши їх, маємо

$-\frac{3f'}{2} - pf - q \cdot 0 + r = 0,$ або $f' + \frac{2}{3} pf = \frac{2}{3} r,$

$$A = B = \frac{2}{3}.$$

7. Нехай функції $f: [0,1] \to R$ і $g: [0,1] \to R$ зростають на проміжку $[0,1]$. Довести, що

$\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx \leq \int_0^1 f(x)g(x)dx.$

Розв'язання

Оскільки f і g – зростаючі функції, то для довільних $x, y \in [0,1]$ виконується нерівність

$$A = \int_0^1 \int_0^1 (f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y))dxdy \geq 0$$

(оскільки $f(x) - f(y)(g(x) - g(y)) \geq 0$).

Тоді

$$A = \int_0^1 \int_0^1 (f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y))dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 f(x)g(x)\ dxdy - \int_0^1 \int_0^1 f(y)g(x)\ dxdy +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 f(y)g(y)\ dxdy - \int_0^1 \int_0^1 f(x)g(y)\ dxdy =$$

$$= 2\int_0^1 dy \int_0^1 f(x)g(x)dx - 2\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx =$$

$$= 2\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx\right) \geq 0.$$

Що й треба було довести.

Навчальне видання

ЗБІРНИК ЗАДАЧ
із математики

«Математична олімпіада-2015»

(за матеріалами другого етапу олімпіади з математики
серед студентів вищих технічних навчальних закладів України)

Відповідальний за випуск В. О. Ячменьов
Редактор Н. А. Гавриленко
Комп’ютерне верстання В. В. Ніколенко

Підписано до друку 20.01.2016, поз.
Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 2,09. Обл.-вид. арк. 1,17.
Тираж 30 пр. Зам. №
Собівартість вид. грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.