## СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

### Лекція 2. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему *m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.1)$$

де $a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ - відомі коефіцієнти; $b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ - праві частини (чи вільні члени) також відомі; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - невідомі, які слід визначити.

**Розв'язком системи (2.1)** називається набір чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, які при підстановці в кожне рівняння перетворюють його на тотожність.

Система називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок.

Система називається **несумісною, якщо вона розв'язків не має.**

### Методи розв'язування системи лінійних рівнянь.

#### 1.1. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.

Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок і його знаходять за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Якщо $\Delta = 0$, а одне з чисел $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ не дорівнює нулю, то система не має розв'язку. При $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ система може бути несумісною або мати безліч розв'язків.

Аналогічні формули Крамера справедливі для *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими.

## 1.2. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь.

Нехай задано систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.2}$$

Введемо матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$

Тоді згідно з правилом множення матриць систему (1) можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею *X*: $A \cdot X = B$.

Якщо матриця *A* має обернену матрицю $A^{-1}$, то

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Ця формула називається матричним записом розв'язку системи (1).

Оскільки матричним способом можна розв'язати систему тільки тоді, коли $\det A \neq 0$.

Обернену матрицю $A^{-1}$ знаходимо за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Отже, щоб розв'язати систему рівнянь (2.2), достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи *A*, і помножити її на матрицю з вільних членів справа.

**Приклад:** розв'язати матричним способом систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Вводимо матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Обчислюємо визначник матриці $A$: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 56 \neq 0$

Знаходимо матрицю $A^{-1}$, обернену до матриці $A$: $A^{-1} = \dfrac{1}{56}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 13 \\ 7 & 13 & -11 \\ -7 & 11 & -5 \end{pmatrix}$

Знаходимо розв'язки за формулою: $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 13 \\ 7 & 13 & -11 \\ -7 & 11 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 35-5+26 \\ 35-13-22 \\ -35-11-10 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 56 \\ 0 \\ -56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $(1; 0; -1)$

### 1.3. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.

Метод Гауса – це метод послідовного виключення невідомих.
Розглянемо систему $n$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $n$ невідомих (2.2)

Вважаємо, що серед коефіцієнтів $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}$ при невідомому $x_1$ є відмінні від нуля. Нехай таким буде $a_{11}$, тоді перше рівняння системи (2.2) почленно ділимо на $a_{11}$ і отримуємо

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \frac{b_1}{a_{11}} \ . \tag{2.3}$$

Рівняння (2.3) помножимо на $(-a_{21})$ і додамо до другого рівняння системи (2.2); на $(-a_{31})$ і складаємо з третім рівнянням; ..., на $(-a_{n1})$ і складаємо з $n$-м рівнянням системи (2.2).В результаті приходимо до системи, $(n-1)$-е рівняння якої не містить невідоме $x_1$.

Аналогічно, послідовно виключаючи $x_2, x_3, ..., x_{n-1}$, отримуємо систему еквівалентну до початкової. Вона має наступний вигляд

$$\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2} = \ldots = \boldsymbol{x_n} = \mathbf{0} \tag{2.4}$$

Поетапно піднімаючись від низу до верху в системі (2.4), знаходимо $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1$.

Усе викладене в цьому параграфі можна записати інакше.

Складемо так звану розширену матрицю системи (2.2) :

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} & b_2 \\ .... & .... & .... & .... & .... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} & b_n \end{array}\right). \tag{2.5}$$

За допомогою еквівалентних перетворень (**працюючи тільки з рядками)** матрицю (2.5) приводимо до виду

$$B' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12}' & a_{13}' & ... & a_{1n}' & b_1' \\ 0 & 1 & a_{23}' & ... & a_{2n}' & b_2' \\ .... & .... & .... & .... & .... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & b_n' \end{array}\right) \tag{2.6}$$

Тоді з (2.6) знаходимо послідовно $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1$, повторюючи вищезгадані дії.

Якщо за допомогою еквівалентних перетворень розширену матрицю $B$ (2.5) системи (2.2) привести до виду

$$B'' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1'' \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_2'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n'' \end{array}\right), \tag{2.7}$$

отримаємо іншу модифікацію методу Гауса. Вона має назву методу Жордано-Гауса.

Розглянемо цю модифікацію на прикладі 1:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -1 & 1 & 3\\ -1 & 1 & -2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix}-2\\ \\ \\ -2\end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & -1 & 3\\ 0 & 3 & -1 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \; 2 \;\; -3$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -7 & 1 & 9\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \; 7 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -7 & 1 & 9 \end{array}\right) \sim \; 3 \;\; 2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 16 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \; -1 \;\; -2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Повертаючись до розв'язку системи, робимо висновок:

$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -1, x_4 = 2$ .

**2.Теорема Кронекера – Капеллі:**

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці.

Наслідок. Якщо $r(A) = r(\overline{A}) = n$, то система має єдиний розв’язок. Якщо $r(A) = r(\overline{A}) < n$, то система сумісна і невизначена. Якщо $r(A) < r(\overline{A})$, то система несумісна.

Розглянемо випадок, коли система сумісна, але ранг менше кількості невідомих, тобто, якщо система має нескінченну множину розв’язків.

Що означає, якщо ранг матриці коефіцієнтів рівний *r*? Це означає, що існує певний мінор $M_r \neq 0$. Він називається **базисним мінором. Визначивши цей базисний мінор, ми запишемо еквівалентну систему для системи (2.1). Для цього залишаємо тільки ті рівняння, коефіцієнти яких утворили базисний мінор; при цьому члени рівнянь, коефіцієнти при яких не увійшли до базисного мінору, перенесемо вправо. Тоді отримаємо систему** r лінійних рівнянь відносно r невідомих, а утворені праві частини зіграють роль вільних членів. Для розв’язання такої системи можна використовувати один із вже розглянутих методів (формули Крамера, матричний спосіб, метод Гауса, метод Жордана-Гауса). В результаті отримаємо розв'язок системи, де r невідомих будуть виражені через інші (n - r), які носять назву **незалежних невідомих.**

Якщо дати цим невідомим довільні числові значення, то отримаємо загальний розв'язок системи. Щоб отримати часткові розв'язки системи, досить зафіксувати значення незалежних змінних.

**Приклад:** знайти ранг основної і розширеної матриці для системи

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -1 & -4 \\ 3 & -16 & 0 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$r(A) = r(\overline{A}) = n = 3 \;\Rightarrow$ система має єдиний розв'язок.

Метод Гауса і його модифікація - метод Жордана-Гауса дозволяють одночасно довести сумісність системи і знайти її розв'язок, якщо він існує. Тоді як для формул Крамера або матричного способу спочатку необхідно перевірити чи сумісна система. Потім у разі сумісності записати еквівалентну систему і застосувати вище вказані методи тільки до еквівалентної системи.

## 3. Однорідні системи лінійних рівнянь.

Системи лінійних рівнянь називаються однорідними, якщо праві частини рівнянь дорівнюють нулю.

Однорідна система $m$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Ця система завжди має нульовий розв'язок: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Ненульовий розв'язок даної системи (якщо він є) можна знайти методом Гаусса.

Якщо $m = n$ і визначник $\Delta$ системи дорівнює нулю ($\Delta$=0), то однорідна система має безліч ненульових розв'язків.

Нехай дано систему двох однорідних лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Розв'язок такої системи можна знайти за формулами

$x = t\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, $y = -t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $z = t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, де $t$ - довільне число.

Нехай дано систему трьох однорідних лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases}$$

Якщо $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$, то система має безліч розв'язків. Нехай у визначнику $\Delta$ існує принаймні один відмінний від нуля мінор другого порядку, наприклад, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, тоді розв'язки можна знайти за формулами $x = t\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, $y = -t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $z = t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, де $t$ - довільне число.

**Приклад.** Розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ 3x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 9 - (3 - 6 - 4) = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

$$x = t \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = t \cdot (-3 - 1) = -4t$$

$$y = -t \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -t \cdot (2 - 1) = -t$$

$$z = t \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = t \cdot (2 + 3) = 5t$$

Відповідь: $(-4t;\ -t;\ 5t)$