

Текстові задачі в завданнях ЗНО



Викладач: Захарченко Надія Миколаївна

Умовний поділ текстових задач:

- ❖ Задачі «на рух».
- ❖ Задачі «на роботу».
- ❖ Задачі на суміші та сплави
- ❖ Задачі з цілочисленними значеннями.
- ❖ Задачі «на відсотки».

Задачі на рух

Задачі на рух

Основна формула задач на рух:

$$S = V t$$

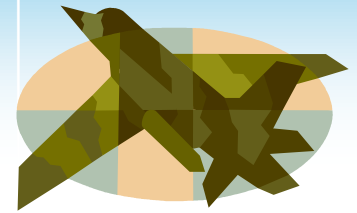
S – відстань (пройдений шлях),

t – час руху

V – швидкість

(відстань, пройдену за одиницю часу)

Задачі на рух



Відстань

124 км

595 км

84 км

4320 км

швидкість

62 км/год.

85 км/год

28 км/год.

720 км/год.

час

2 год

7 год.

3 год.

6 год

Задачі на рух

Які ситуації можливі в задачах на рух?

Ситуація перша.

Два об'єкти починають рух одночасно назустріч один одному.

Ситуація друга.

Два об'єкти починають рухатись одночасно в протилежних напрямках.

Ситуація третя.

Два об'єкти починають рухатись одночасно в одному напрямку.

Схема задач на рух



1). Рух назустріч.

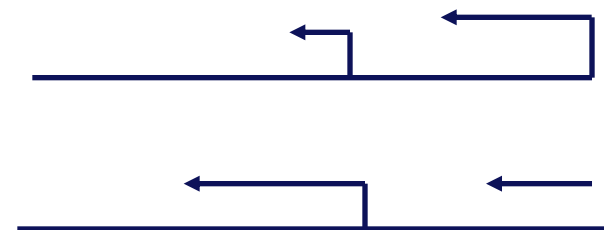


2). Рух в протилежних напрямках з одного пункту

3). Рух в протилежних напрямках.
Початок з різних пунктів



4). Рух в одному напрямку з різних пунктів



Задачі на рух

Умовний поділ задач на рух:

- ❖ Рух назустріч
- ❖ Рух в одному напрямку
- ❖ Рух в протилежних напрямках
- ❖ Рух і течія
- ❖ Рух по колу

Задачі на рух

Рух назустріч один одному

В даному випадку час до зустрічі двох об'єктів обчислюємо за формулою

$$t = \frac{S}{v_1 + v_2},$$

де початкова відстань між двома

об'єктами S , швидкості об'єктів v_1 та v_2 .

В даному випадку сума швидкостей $v_1 + v_2$ називається *швидкістю зближення*.



Задачі на рух назустріч

Задача 1. Два автомобілі виїхали назустріч один одному. Початкова відстань між ними була 660 км. Один автомобіль їхав зі швидкістю 100 км/год, а інший зі швидкістю 120 км/год. Через який час вони зустрінуться?



Розв'язання:

- 1) $100 + 120 = 220$ (км/год) - швидкість зближення автомобілів .
- 2) $660 : 220 = 3$ (год) - час до зустрічі автомобілів.

Відповідь: через 3 години.

Задачі на рух

Рух в одному напрямку

В даному випадку час до зустрічі двох об'єктів обчислюємо за формулою

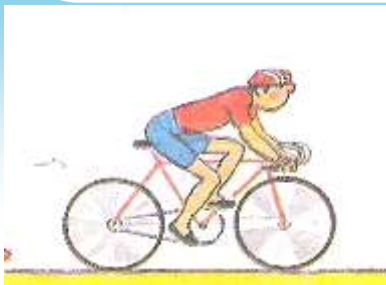
$$t = \frac{S}{v_1 + v_2},$$

де початкова відстань між двома об'єктами S , швидкості об'єктів v_1 та v_2 .

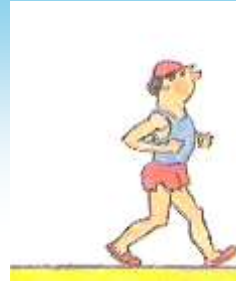
В даному випадку сума швидкостей $v_1 + v_2$ називається *швидкістю зближення*.

Задачі на рух

Задача 2



24 км



A

18 км/год.

6 км/год.

Чому велосипедист
наздожене спортсмена?

Із двох пунктів, відстань між якими 24 км, одночасно в одному напрямку вийшов спортсмен і виїхав велосипедист. Швидкість спортсмена 6 км/год., а швидкість велосипедиста 18 км/год.

- 1) Через скільки годин велосипедист наздожене спортсмена?
- 2) На якій відстані від пункту В велосипедист наздожене спортсмена?
- 3) На скільки кілометрів шлях велосипедиста більше ніж шлях спортсмена?

Аналізуємо і розв'язуємо задачу.



- ✓Давайте поміркуємо, чому велосипедист дожене спортсмена?
- ✓На скільки кілометрів велосипедист наближається до спортсмена кожний час?

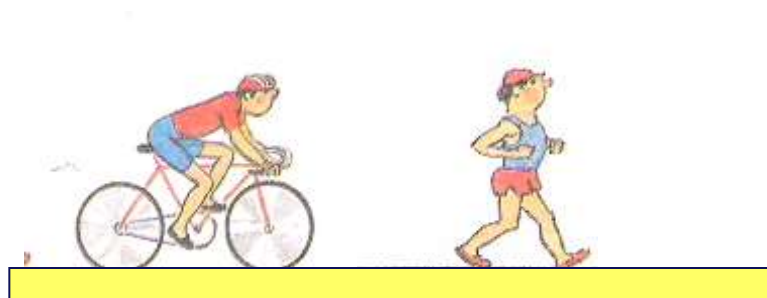
Ця відстань – швидкість зближення.

- ✓На скільки кілометрів велосипедисту необхідно наблизитись до спортсмена?
- ✓Як обчислити час, через який велосипедист наздожене спортсмена?
- ✓Скільки кілометрів за цей час пройде спортсмен?
- ✓А яку відстань проїде велосипедист?
- ✓На якій відстані від пункту В велосипедист наздожене спортсмена?

Перевір свій роз'язок.

- 1). $18 - 6 = 12$ (км /год) – швидкість зближення велосипедиста і спортсмена.**
- 2). $24 : 12 = 2$ (год.) – через такий час велосипедист наздожене спортсмена.**
- 3). $6 * 2 = 12$ (км) – на такій відстані від пункту В велосипедист наздожене спортсмена.**

Відповідь: через 2 години; 12 км.



Задачі на рух

Ситуація друга

Задачі на рух в протилежних напрямках

1. 
2. 



48 км / год.

54 км/ год.



Скільки кілометрів буде між тиграми через 3 години?

Задача 3. Із однієї точки одночасно в протилежних напрямках вибігли два тигри. Швидкість одного тигра 48 км / год., а другого – 54 км / год. Яка відстань буде між тиграми через 3 години?

ПЕРШИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗКУ

1). $48 \cdot 2 = 96$ (км) – пробіжить один тигр за 2 год.

2). $54 \cdot 2 = 108$ (км) – пробіжить другий тигр за 2 год.

3). $96 + 108 = 204$ (км) – буде між тиграми через 2 год.

Відповідь: 204 км.

ДРУГИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗКУ

1). $48 + 54 = 102$ (км / год.) – швидкість віддалення тигрів.

2). $102 \cdot 2 = 204$ (км) – відстань між тиграми через 2 години.

Відповідь: 204 км.

Задачі на рух

Задача 4.

Моторний човен та яхта, знаходячись на озері на відстані 30 км один від одного, рухаються назустріч один одному і зустрічаються через одну годину. Якби моторний човен знаходився на відстані 20 км від яхти і доганяв її, то на це знадобилось би 3 год. 20 хв.

Знайти швидкості моторного човна та яхти.



30 км



Задачі на рух

Розв'язання. Нехай x км/год – швидкість човна, y км/год – швидкість яхти. Тоді швидкість зближення човна і яхти при русі назустріч дорівнює $x + y$, а час до зустрічі – $\frac{30}{x + y}$, що за умовою складає 1 год. Якби човен доганяв яхту, то швидкість зближення була б $x - y$. А час до зустрічі $\frac{20}{x - y}$ або $\frac{10}{3}$ год.

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{30}{x + y} = 1, \\ \frac{20}{x - y} = \frac{10}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 30, \\ x - y = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 18, \\ y = 12. \end{cases}$$

Відповідь: швидкість човна 18 км/год, швидкість яхти 12 км/год.

Задачі на рух

Рух по колу

Якщо в умові задачі дано рух по колу,
то шляхом вважають довжину кола,
по якому рухаються об'єкти

$$S = 2\pi r,$$

де r – радіус кола.



Задачі на рух

Якщо об'єкти рухаються **назустріч**, то час до першої зустрічі

$$t = \frac{2\pi r}{v_1 + v_2},$$

враховуючи, що

$$S_2 + S_1 = 2\pi r.$$

Через такий же час об'єкти зустрінуться наступний раз, тобто

t – це час між двома послідовними зустрічами.

Задачі на рух

Якщо тіла рухаються **в одному напрямку** і другий об'єкт має швидкість більшу ніж перший, то зустріч буде відбуватись тоді, коли шлях другого об'єкта перевищуватиме шлях першого на довжину кола, тобто

$$S_2 - S_1 = 2\pi r ,$$

тоді час між двома послідовними зустрічами

$$t = \frac{2\pi r}{v_2 - v_1} .$$

Зауваження. При розв'язуванні задач на рух необхідно слідкувати за одиницями вимірювання.

Задачі на рух

Задача 5. По колу радіусом 2 м рівномірно і в одному напрямку рухаються дві точки. Одна з них робить повний оберт на 3,14с швидше ніж друга. Час між двома послідовними зустрічами точок дорівнює 6,28с. Знайти швидкості руху точок.

Задачі на рух

Розв'язання: Точки рухаються по колу довжина якого дорівнює $2\pi r$, де r - радіус кола. За умовою $r = 2$, тому довжина кола дорівнює 4π .

Нехай x м/с – швидкість першої точки, тоді час, за який точка пройде один оберт дорівнює $\frac{4\pi}{x}$ с. Аналогічно, y м/с – швидкість другої точки (причому $x > y$), за $\frac{4\pi}{y}$ с вона робить один оберт. За першою умовою задачі маємо рівняння

$$\frac{4\pi}{y} - \frac{4\pi}{x} = 3,14.$$

Друга умова означає, що за 6,28с перша точка пройде по колу шлях на 4π більший, ніж друга точка. Це дає друге рівняння

$$6,28x - 6,28y = 4\pi.$$

Приймаємо $\pi = 3,14$ і одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{4}{y} - \frac{4}{x} = 1, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4(x-y)}{xy} = 1, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \cdot y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Враховуючи, що $x > y$, знаходимо $x = 4$, $y = 2$.

Відповідь: швидкість руху першої точки 4 м/с, другої – 2 м/с.

Задачі на роботу

Задачі на роботу

Дуже близьку математичну модель до задач «на рух» мають задачі, в яких хто-небудь виконує яку-небудь роботу, або задачі, які пов'язані з наповненням резервуарів (басейну).

У задачах такого типу вся робота або повний об'єм резервуару відіграє роль відстані (шляху), а продуктивність праці об'єктів, які виконують роботу, аналогічні швидкості руху.

Задачі на роботу

Будемо користуватись такими позначеннями: робота – A ; продуктивність праці – N (кількість роботи, яку виконали за одиницю часу). Робота, виконана за час t , в цьому випадку обчислюється за формулою .

$$A = N \cdot t .$$

Абстрактна робота (яка не вимірюється в штуках, кількості виробів і т. п.) зазвичай приймається за одиницю.

Продуктивність сумісної роботи дорівнює сумі продуктивностей.

Задачі на роботу

Задача 6 .

Двоє робітників, працюючи разом, виконали деяку роботу за 6 год. Перший з них, працюючи окремо, може виконати всю роботу на 5 год. швидше, ніж другий робітник, якщо останній буде працювати окремо. За скільки годин кожний з них, працюючи окремо, зможе виконати всю роботу?

Задачі на роботу

Розв'язання: Прийmemo всю роботу за одиницю. Нехай перший робітник може виконати всю роботу за x год, тоді другому робітнику знадобиться $(x + 5)$ год. Продуктивність праці першого робітника - $\frac{1}{x}$, другого - $\frac{1}{x + 5}$. Тоді за 6 год сумісної роботи з продуктивністю, що дорівнює сумі двох продуктивностей, робітники виконали всю роботу. Маємо рівняння

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 5} \right) \cdot 6 = 1;$$

$$\frac{x + 5 + x}{x \cdot (x + 5)} = \frac{1}{6};$$

$$\begin{cases} 6 \cdot (2x + 5) = x^2 + 5x, \\ x \neq 0, \quad x \neq -5; \end{cases}$$

$$x^2 + 5x - 12x - 30 = 0;$$

$$x^2 - 7x - 30 = 0;$$

$$x = 10 \text{ або } x = -3.$$

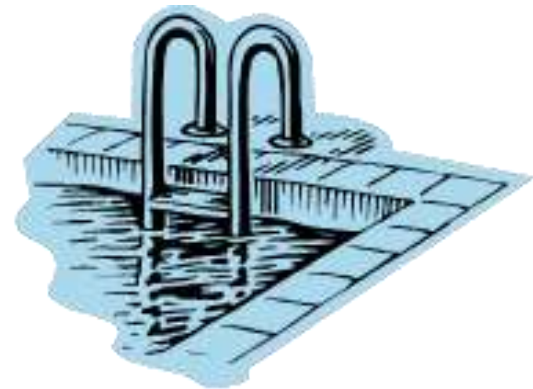
Корінь $x = -3$ не підходить за змістом задачі, тому $x = 10$, $x + 5 = 15$.

Відповідь: 10 год, 15 год.

Задачі на роботу

Задача 7.

Одна труба наповнює басейн на 2 години, а друга на 4,5 години довше, ніж наповнять цей басейн обидві труби відкриті одночасно. За скільки годин може наповнити басейн кожна труба, працюючи окремо?



Задачі на роботу

Розв'язання: Нехай V - об'єм басейну, t - час, за який наповнять басейн дві труби, що працюють разом. Тоді продуктивність першої труби - $\frac{V}{t+2}$, другої - $\frac{V}{t+4,5}$, сумісна продуктивність - $\frac{V}{t}$.

Маємо рівняння

$$\begin{aligned}\frac{V}{t+2} + \frac{V}{t+4,5} &= \frac{V}{t}; \\ \frac{t+4,5+t+2}{(t+2) \cdot (t+4,5)} &= \frac{1}{t}; \\ \begin{cases} t \cdot (2t+6,5) = t^2 + 6,5t + 9, \\ t \neq 0, t \neq -2, t \neq -4,5; \end{cases} \\ t^2 - 9 &= 0; \\ t &= \pm 3. \end{aligned}$$

Корінь $t = -3$ не підходить за змістом задачі, тому $t = 3$, $t_1 = t + 2 = 5$, $t_2 = t + 4,5 = 7,5$.

Відповідь: перша труба наповнить басейн за 5 год, друга – за 7,5 год.

Задачі на роботу

Умови задач ЗНО

2006 рік

Кішка з кошеням з'їдають куплений господарем корм за 8 днів. Якби кішку годували одну, то їй вистачило б корму на 11 днів. На скільки повних днів вистачило б корму кошеняті?

Відповідь: 29 днів.





Задачі на суміші та сплави



Задачі на суміші та сплави

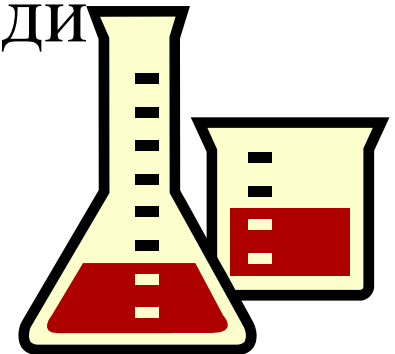
Основні припущення в задачах такого виду:

а) всі одержані суміші чи сплави однорідні;

б) при змішуванні двох розчинів, що мають об'єми v_1 і v_2 , одержуємо суміш, об'єм якої дорівнює $v_1 + v_2$.

в) при переробці двох сплавів, що мають маси m_1 і m_2 , одержимо сплав масою $m_1 + m_2$.

Відмітимо, що такі припущення не завжди виконується в дійсності.



Задачі на суміші та сплави

Задача 8 . Маємо шматок сплаву міді з оловом масою 12 кг, що містить 45% міді. Скільки чистого олова необхідно додати до цього шматка сплаву, щоб одержати новий сплав із вмістом міді 40%.

Розв'язання: Нехай x кг олова необхідно додати до сплаву, який маємо.
 Маємо рівняння, який одержимо дорівнюватиме $(12 + x)$ кг.
 $0,4 \cdot (12 + x) = 0,45 \cdot 12$.
 За умовою задачі складаємо таблицю:

$0,4x = 0,45 \cdot 12 - 0,4 \cdot 12$; сплав	мідь	олово	маса
$0,4x = 0,05 \cdot 12$; I	$0,45 \cdot 12$	$0,55 \cdot 12$	12 кг
$4x = 6$; II	-	x	x кг
$x = 1,5$. новий	$0,4 \cdot (12 + x)$		$12 + x$

Відповідь: 1,5 кг чистого олова треба додати до сплаву.

Задачі на суміші та сплави

Приклад . Маємо сталь двох сортів із вмістом нікелю 5% і 40%.

Розв'язання. Нехай вага першого сплаву — x кг, другого — y кг.

Скільки сталі того і іншого сорту необхідно взяти,

за умовою задачі складаємо таблицю

щоб після переплавки одержати 140 т сталі із вмістом нікелю 30%?

сплав	нікель	домішки	маса
I	$0,05x$	$0,95x$	x т
II	$0,4y$	$0,6y$	y т
новий	$0,3 \cdot 140$	$0,7 \cdot 140$	140 т

Складаємо систему рівнянь, використовуючи перший і третій стовпчики таблиці

$$\begin{cases} x + y = 140, \\ 0,05x + 0,4y = 0,3 \cdot 140; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 140, \\ 5x + 40y = 4200; \end{cases} \quad \begin{cases} -5x - 5y = -700, \\ 5x + 40y = 4200; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 140, \\ 35y = 3500; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 140, \\ y = 100; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 40, \\ y = 100. \end{cases}$$

Відповідь: 40 т сталі із вмістом нікелю 5%,
100 т сталі із вмістом нікелю 40%.

Задачі на суміші та сплави

Умови задач ЗНО

❖ У двох сплавах мідь і цинк відносяться, 5:2 і 3:4 відповідно. На скільки кілограмів одного із сплавів треба взяти більше, щоб одержати 28 кг нового сплаву з рівним вмістом міді і цинку?

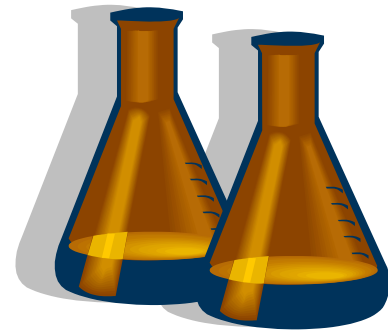
Відповідь: на 14 кг.

❖ Маємо два водно-сольових розчини. Концентрація солі в першому розчині становить 0,25, а в другому – 0,4. На скільки більше треба взяти кілограмів одного розчину, ніж другого, щоб отримати розчин масою 50 кг, концентрація солі в якому – 0,34?

Відповідь: на 10 кг.

❖ До 40% розчину соляної кислоти додали 50 г чистої кислоти, після чого концентрація розчину стала рівною 60%. Знайти початкову вагу розчину.

❖ Яку кількість води потрібно додати до 1 літру 9% розчину оцту, щоб одержати 3% розчин?



Задачі з цілочисленними

У даному ~~випадку розглянемо~~ **значеннями** групу задач на складання рівнянь, у яких невідомі величини можуть приймати лише цілі значення.

Часто ці задачі складені таким чином, що однозначний розв'язок можна одержати лише при використанні цієї умови.

Задачі з цілочисленними значеннями

Приклад . Знайти двозначне число знаючи, що цифра його одиниць на 2 більше цифри його десятків і що добуток шуканого числа на суму його цифр дорівнює 144.

Розв'язання: Нехай задане число $\overline{xu}$,

де $\overline{x}$ — число десятків, $\overline{u}$ — число одиниць.

Шукане число $\overline{xu} = 10x + u$,
 $(10x + u) \cdot (x + u) = 144$; $(10x + x + 2) \cdot (2x + 2) = 144$;

а $\begin{cases} y = x + 2, \\ x + y. \end{cases}$
 $11x^2 + 13x - 70 = 0$; $x_1 = 2, x_2 = -\frac{35}{11}$.

За умовою задачі цифра одиниць на 2 більша цифри десятків, тобто $u = x + 2$.
 Користуючись цим, приходимо до системи рівнянь:

Складаємо систему рівнянь:
 $\begin{cases} u = x + 2, \\ (10x + u) \cdot (x + u) = 144. \end{cases}$ Шукане число дорівнює 24.

Відповідь: 24.

Задачі з цілочисленними значеннями

Приклад . Трьохзначне число закінчується цифрою 2. Якщо її перенести у початок запису, то одержане число буде на 18 більше, ніж задане. Знайти це число.



****2**

Задачі з цілочисленними значеннями

Розв'язання: Нехай перша і друга цифри числа відповідно дорівнюють x і y . Тоді $\overline{xy2} = 100x + 10y + 2$ - шукане число.

Якщо цифру 2 перенести у початок запису числа, то одержимо число $\overline{2xy} = 200 + 10x + y$. За умовою задачі число $\overline{2xy}$ на 18 більше шуканого, тобто

$$\overline{2xy} - \overline{xy2} = 18,$$

$$(200 + 10x + y) - (100x + 10y + 2) = 18,$$

$$-90x - 9y = -180,$$

$$10x + y = 20.$$

За умовою x і y – цифри шуканого числа $\overline{xy2}$, тому $100x + 10y + 2 = 10(10x + y) + 2 = 10 \cdot 20 + 2 = 202$.

Задачі з цілочисленними значеннями

❖ На лузі паслись декілька корів.

У них ніг на 24 більше, ніж голів.

Скільки корів паслось на лузі?



❖ Марина зробила в диктанті декілька помилок.

Гриша у неї все списав, та допустив ще 5 помилок.

Скільки помилок допустив кожний, якщо учитель виявив у двох диктантах 35 помилок?

❖ В клітці знаходяться фазани і кролики. Всього 6 голів і 29 ніг. Скільки кроликів і скільки фазанів у клітці?

Умови задач ЗНО

1. Середній вік одинадцяти футболістів команди становить 22 роки. Під час гри одного з футболістів було вилучено з поля, після чого середній вік гравців, що залишилися, став 21 рік. Скільки років футболісту, який залишив поле?
2. Для опалювальної системи будинку необхідні радіатори із розрахунку: три одиниці на 50 м^3 . Яку кількість одиниць радіаторів треба замовити, якщо новий будинок має форму прямокутного паралелепіпеда розміру $15\text{м} \times 18\text{м} \times 25\text{м}$?
3. Будівельна компанія закупила для нового будинку металопластикові вікна та двері у відношенні 4:1. Укажіть число, яким може виражатись загальна кількість вікон і дверей у цьому будинку.

А	Б	В	Г	Д
41	45	54	68	81

4. Знайти двохзначне число, якщо частка від ділення шуканого числа на суму його цифр дорівнює 4, а частка від ділення добутку його цифр на суму цифр дорівнює 2.

Задачі на відсотки



Задачі на відсотки

Три види основних задач на відсотки:

- ❖ Знаходження відсотка від цілого.
- ❖ Знаходження цілого за даним числом його відсотків.
- ❖ Відсоткове відношення.



Задачі на відсотки

При розв'язуванні основних видів задач на відсотки застосовують три способи:

- *зведення до одиниці,*
- *зведення до відповідних задач на дроби,*
- *застосування пропорцій.*



Нам здається, що основним способом для розв'язування таких задач слід взяти спосіб зведення до одиниці.

Задачі на відсотки

Знаходження відсотка від цілого.

Приклад 1: Знайти 21% від 150.

Розв'язання.

Спосіб 1: $150 : 100 \cdot 21 = 1,5 \cdot 21 = 31,5$.

Спосіб 2: $150 \cdot 0,21 = 150 \cdot \frac{21}{100} = \frac{3 \cdot 21}{2} = 31,5$.

Спосіб 3: 150 складає 100%,
 X складає 21%

$$x = \frac{150 \cdot 21}{100} = 31,5.$$

Задачі на відсотки

Знаходження цілого за даним числом його відсотків.

Приклад 2: Знайти число, якщо 17% його становлять 68.
Розв'язання.

Спосіб 1: $68 : 17 \cdot 100 = 400$.

Спосіб 2: $68 : 0,17 = 68 : \frac{17}{100} = \frac{68 \cdot 100}{17} = 400$.

Спосіб 3: 68 складає 17%,
 X складає 100%

$$x = \frac{68 \cdot 100}{17} = 400.$$

Задачі на відсотки

Відсоткове відношення.

Приклад 3: Скільки відсотків складає число 18 від 144?
Розв'язання.

$$\text{Спосіб 1: } 18 : \frac{144}{100} = \frac{18 \cdot 100}{144} = \frac{1 \cdot 100}{8} = \frac{25}{2} = 12,5\%$$

$$\text{Спосіб 2: } \frac{18}{144} \cdot 100\% = \frac{1}{8} \cdot 100\% = 12,5\% .$$

Спосіб 3: 18 складає $x\%$,
144 складає 100%

$$x = \frac{18 \cdot 100}{144} = 12,5\% .$$

Задачі на відсотки

Завдання ЗНО з відсотками

Приклад 4.

Початкова вартість книги становила 136 грн. Унаслідок уцінення вартість цієї книги було зменшено на 60%.

1. Обчисліть вартість книги після уцінення (у грн).
2. Скільки відсотків становить початкова вартість книги від її вартості після уцінення?

Розв'язання.

- 1) Вартість книги після уцінення становить 40% від початкової вартості, тому $136 : 100 \cdot 40 = 1,36 \cdot 40 = 54,4$

Вартість книги після уцінення становить 54,4 грн.

- 2) Вартість книги після уцінення 54,4 грн. становить 100%, а початкова вартість книги 136 грн. становить $a\%$.

Складаємо пропорцію $\frac{54,4}{136} = \frac{100}{a}$, звідки знаходимо $a = \frac{136 \cdot 100}{54,4} = 250\%$.

Відповідь: 1) 54,4; 2) 250.

Задачі на відсотки

Приклад 5: Задано числовий вираз $\frac{2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{3}}{4\frac{1}{6} - 1\frac{1}{4}} + 3\frac{3}{5}$.

- 1) Обчисліть значення даного виразу.
- 2) Знайдіть число, якщо 25% його складає значення даного виразу.

Розв'язання.

$$1) \frac{2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{3}}{4\frac{1}{6} - 1\frac{1}{4}} + 3\frac{3}{5} = \frac{3 + \frac{13}{12}}{3 - \frac{1}{12}} + 3\frac{3}{5} = \frac{\frac{49}{12}}{\frac{35}{12}} + 3,6 = \frac{49}{35} + 3,6 = \frac{7}{5} + 3,6 = 1,4 + 3,6 = 5.$$

$$2) 5 : 25 \cdot 100 = 20$$

Відповідь: 1) 5, 2) 20.

Задачі на відсотки

Простий відсоток

Коли деяка величина збільшується на постійну кількість відсотків за кожний фіксований період часу, то будемо користуватись формулою виду $A_n = A_0(1 + 0,01pn)$, де A_n - деяка величина, яку одержимо після періоду часу n , $p\%$ - певні відсотки величини A_0 .

Ця формула описує багато конкретних ситуацій і називається формулою простого відсоткового зростання. Існує також формула простого відсоткового спадання $A_n = A_0(1 - 0,01pn)$.

Задачі на відсотки

Приклад 6.

Банк виплачує вкладникам кожного місяця 2% від суми внесеної вкладником (відсотки нараховуються на картку). Клієнт зробив вклад у розмірі 5000 грн. Яку кількість грошей матиме клієнт через півроку?

Розв'язання.

$$A_6 = 5000 \cdot (1 + 0,02 \cdot 6) = 5000 \cdot 1,12 = 5600 .$$

Відповідь 5600 грн.

Задачі на відсотки

Складний відсоток

Ми говоримо, що маємо справу із «складними відсотками», якщо деяка величина підлягає поетапній зміні. При цьому кожний раз її зміна складає визначене число відсотків від значення, яке ця величина мала на попередньому етапі.

Розглянемо спочатку випадок, коли у кінці кожного етапу величина змінюється на одну і ту ж постійну кількість відсотків – $p\%$.

Деяка величина A , початкове значення якої дорівнює A_0 , у кінці першого етапу буде рівна

$$A_1 = A_0 + \frac{p}{100} A_0 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right).$$

У кінці другого етапу її значення стане рівним

$$A_2 = A_1 + \frac{p}{100} A_1 = A_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2$$

У даному випадку множник $1 + \frac{p}{100}$ показує, у скільки разів величина A збільшилась за

один етап. Неважко помітити, що степінь множника $1 + \frac{p}{100}$ співпадає з номером етапу,

тобто

$$A_3 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^3, \text{ і так далі.}$$

У кінці n -го етапу

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n.$$

Ця формула показує, що величина A зростає (або зменшується при $p < 0$) як геометрична

прогресія, перший член якої дорівнює A_0 , а знаменник дорівнює $1 + \frac{p}{100}$.

Задачі на відсотки

Дещо складнішими є задачі, коли приріст величини A на кожному етапі змінюється. Нехай величина A в кінці першого етапу змінюється на $p_1\%$, в кінці другого етапу – на $p_2\%$, в кінці третього – на $p_3\%$ і т. д. Якщо $p_k > 0$, то величина A на цьому етапі зростає, якщо ж $p_k < 0$, то величина A на цьому етапі зменшується. Зміна величини A на $p\%$, рівносильна множенню цієї величини на множник $1 + \frac{p}{100}$. Тому кінцевий вид шуканої формули такий:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{p_n}{100}\right)$$

Задачі на відсотки

Приклади задач на складні відсотки

1. Заробітну плату робітникові спочатку підвищили на 10 %, а через рік знову підвищили на 20 %. На скільки відсотків підвищилась заробітна плата робітника у порівнянні з початковою?
2. Ціну на товар знизили на 10 %, а через місяць підвищили на 10 %. Як змінилась ціна товару?
3. Саша за весну схуд на 20 %, за літо поправився на 30 %, за осінь схуд на 20 %, за зиму поправився на 10 %. Як змінилась його вага?
4. Вологість повітря в полудень у порівнянні з ранком знизилась на 12 %, а потім підвищилась на 5 %, у порівнянні з полуднем. Скільки відсотків від ранкової вологості складає вологість вечірнього повітря і на скільки відсотків вона знизилась?
5. На депозитний рахунок під 3 % річних на початку року поклали A євро. Скільки грошей буде на рахунку через n років?

Задачі на відсотки

Приклад 7. Банк приймає кошти на депозитний рахунок під 320% річних, але відсотки нараховуються щомісячно. Із нарахованої суми береться податок у розмірі 25%. Сума, що залишилась після цього додається до початкової суми на депозитному рахунку і все повторюється. У скільки разів збільшиться початкова сума через півроку? (Відповідь округліть до цілих).

Розв'язання: Так, як річна ставка на депозитному рахунку складає 320%, то щомісячна складає - $\frac{320}{12} = \frac{80}{3}\%$. Нехай сума початкового рахунку A_0 , тоді в кінці першого місяця

$$A_1 = A_0 + \left(A_0 \cdot \frac{80}{3 \cdot 100} \right) \cdot \frac{75}{100}$$

(дана формула включає податкові відрахування по рахунку у розмірі 25% - множник $\frac{75}{100}$).

Отже,

$$A_1 = A_0 \left(1 + \frac{1}{5} \right), \quad A_1 = \frac{6}{5} A_0.$$

Застосуємо формулу, що показана вище: після k -го місяця сума становить

$$A_k = A_0 \left(\frac{6}{5} \right)^k.$$

У нашому випадку, за шість місяців початкова сума на рахунку збільшиться у

$$\frac{A_6}{A_0} = \left(\frac{6}{5} \right)^6 \approx 2,9 \text{ рази.}$$

Відповідь: у три рази.

Висновки



- ❖ Для того, щоб навчитись розв'язувати текстові задачі, необхідно набути досвід їх розв'язку шляхом багаторазового повторення операцій, дій, які складають предмет вивчення.
- ❖ Навички розв'язку текстових задач формуються на основі осмислених знань і умінь.
- ❖ Починати розв'язування текстової задачі необхідно зі створення математичної моделі умови задачі.
- ❖ Знання умовного поділу текстових задач значно спрощує пошуки правильного ходу розв'язку задачі.

Дякую за увагу !