Міністерство освіти і науки України

Сумський державний університет

4346 Робочий зошит

із дисципліни «Вища математика»

на тему «Ряди»

для студентів усіх інженерних спеціальностей

денної форми навчання

Суми

Сумський державний університет

2018

Робочий зошит із дисципліни «Вища математика» на тему «Ряди» / укладачі: Н. І. Одарченко, І. О. Шуда. – Суми : Сумський державний університет, 2018. – 19 с.

Кафедра математичного аналізу і методів оптимізації

Ряди

Вираз вигляду $u_1+u_2+...+u_n+...m=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ називають числовим рядом. Числа $u_1,u_2,...,\mathrm{u}_n$ називають числами ряду, u_n – загальним членом ряду.

Необхідна ознака збіжності ряду

____

Ознака порівняння ____

Радикальна ознака Коші ____

Ознака Д'Аламбера ____

Інтегральна ознака Коші ____

Числовий ряд вигляду $\sum_{n=i}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n+1}u_n+...$ називають знакозмінним рядом.

Ознака Лейбніца ____

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

$$\sum_{n=i}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}=\frac{3(3)!}{1^5}+\frac{3^2(4)!}{2^5}+\frac{3^3(5)!}{3^5}+...+\frac{3^n(n+2)!}{n^5}+...$$

Для дослідження ряду на збіжність застосуємо ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+3)!}{(n+1)^5}\cdot\frac{n^5}{3^n(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}3\left(\frac{n}{n+1}\right)^5\cdot\frac{(n+2)!\cdot(n+3)}{(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}3\left(\frac{n}{n+1}\right)^5\cdot(n+3)=$$

$$=3\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^5\cdot\lim_{n\to\infty}(n+3)=\infty.$$

Отже, ряд є розбіжним.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k+1)^n\cdot(n+k)!}{n^3}$.

____

____

____

____

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k\cdot n-\left(k+1\right)}{k^{n}\cdot\left(n+\left(k-8\right)\right)!}$.

Приклад 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}=\left(\frac{3}{4}\right)^{3}+\left(\frac{3}{4\cdot 2}\right)^{6}+\left(\frac{4}{4\cdot 3}\right)^{9}+\ldots+\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}+\ldots$

Для дослідження ряду на збіжність застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{u}+\frac{1}{u}}{\frac{4n}{u}}\right)^{3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{4}\right)^{3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{3}=\frac{1}{64}<1.$$

Отже, ряд збігається.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+\left(k+1\right)}{\left(k+3\right)n}\right)^{3n}$.

Приклад 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^{2}}=\left(\frac{2}{2}\right)^{1}+\left(\frac{3}{4}\right)^{4}+\left(\frac{4}{6}\right)^{9}+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^{2}}+\ldots$

Для дослідження ряду на збіжність застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{2n}{n}}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\right)^{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0<1.$$

Ряд збігається.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+\left(k+3\right)}{\left(k+2\right)n}\right)^{n^{2}}$.

Приклад 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln(8n+2)}=\frac{1}{(3+2)\ln(3+2)}+\frac{1}{(6+2)\ln(6+2)}+\frac{1}{(9+2)\ln(9+2)}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(3n+2)\ln(3n+2)}+\ldots$$

Для дослідження ряду на збіжність застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\int_{1}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(3x+2)\ln(3x+2)}=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{(3x+2)\ln(3x+2)}=\left|\begin{array}{lll} & \ln(3x+2)=t & \\ & dt=\dfrac{3}{3x+2}dx & \\ x & 1 & b \\ t & \ln 5 & \ln(3b+2)\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_{\ln 5}^{\ln(3b+2)}\frac{dt}{3t}=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\ln|t|\Big|_{\ln 5}^{\ln(3b+2)}=\frac{1}{3}\left(\lim_{b\to\infty}\left(\ln\ln(3b+2)-\ln\ln 5\right)\right)=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\ln\frac{\ln(3b+2)}{\ln 5}=\infty.$$

Інтеграл є розбіжним, а отже, розбіжним є і цей ряд.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(kn+(k+2)\right)\ln\left(kn+(k+2)\right)}$.

Приклад 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9}=\frac{1}{1+9}+\frac{1}{4+9}+\frac{1}{9+9}+\ldots+\frac{1}{n^2+9}+\ldots$

Для дослідження ряду на збіжність застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\int_{1}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2+9}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^2+9}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big|_{1}^{b}=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right).$$

Інтеграл збігається, а отже, збігається і ряд.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+k^2}$.

Приклад 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{3n+1}+\ldots$

Для дослідження ряду на збіжність застосуємо необхідну ознаку збіжності ряду:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{3n}{n}+\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\neq 0$. Отже, цей ряд є розбіжним.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k+2)n}{kn+(8k-10)}$.

Приклад 7. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{15}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\ldots$

Для дослідження ряду на збіжність застосуємо ознаку порівняння, записану у графічній формі.

Нехай подано два знакододатних ряди $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, які збігаються чи є розбіжними одночасно.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Цей ряд називають гармонічним. Він є розбіжним.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}}=1\neq 0.$$

Отже, цей ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ теж є розбіжним.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+(3k+1)}}$.

Приклад 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}=\sin\pi+\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}+\ldots$

Для дослідження ряду на збіжність застосуємо ознаку порівняння, записану у графічній формі.

Для порівняння використаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$

Це геометрична прогресія зі знаменником $q=\frac{1}{2}<1$. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ збігається.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)\cdot\pi}{\frac{\pi}{2^{n-1}}}=\left|\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right|=\pi\cdot 1=\pi\neq 0.$$

Отже, цей ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$ теж збігається.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{(k+2)^n}$.

Приклад 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$

Для дослідження ряду на збіжність застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\int_1^{\infty} f\left(x\right)dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\frac{1}{3}}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_1^b=\frac{3}{2}\lim_{b\to\infty}\sqrt[3]{x^2}\Big|_1^b=\frac{3}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{1}\right)=\infty .$$

Отже, інтеграл є розбіжним, тому розбіжним є і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{k}{k+1}}}$.

____

____

____

____

Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди.

Приклад 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{\left(n+1\right)\cdot 3^n}=\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 3^2}+\frac{1}{4\cdot 3^3}-\ldots+\left(-1\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{\left(n+1\right)\cdot 3^n}+\ldots$

Скористаємося ознакою Лейбніца. Маємо $a_n=\frac{1}{\left(n+1\right)\cdot 3^n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(n+1\right)\cdot 3^n}=0$, тобто цей ряд збігається.

Дослідимо ряд, що складається з абсолютних величин членів цього ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+1\right)\cdot 3^n}$.

Застосуємо ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)\cdot 3^n}{\left(n+2\right)\cdot 3^{n+1}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}<1,$$ тобто

ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+1\right)\cdot 3^n}$ збігається. Отже, цей знакозмінний ряд збігається абсолютно.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+k)(k+1)^n}$.

Приклад 11.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n=\left(\frac{1}{2+7}\right)^1-\left(\frac{1}{2\cdot 2+7}\right)^2+\left(\frac{1}{2\cdot 3+7}\right)^3-\ldots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n+\ldots$$

Скористаємося ознакою Лейбніца. Маємо $a_n=\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n=0$, тобто цей ряд збігається.

Дослідимо ряд, складений з абсолютних величин членів цього ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$.

Застосуємо радикальну ознаку Коші:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+7}=0<1$, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$ збігається. Отже, цей знакозмінний ряд збігається абсолютно.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{kn+(3k+1)}\right)^n$.

Приклад 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}=\frac{1}{1!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{7!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}+\ldots$

Скористаємося ознакою Лейбніца. Маємо $a_n=\frac{1}{(3n-2)!}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(3n-2)!}=0$, тобто цей ряд збігається.

Дослідимо ряд, складений з абсолютних величин членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)!}$.

Застосуємо ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)!}{(3(n+1)-2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)!}{(3n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)!}{(3n-2)!\cdot(3n-1)\cdot(3n)\cdot(3n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3n-1)\cdot 3n\cdot(3n+1)}=0<1.$$

Тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)!}$ збігається. Отже, цей знакозмінний ряд збігається абсолютно.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+(k+2))!}$.

____

____

____

____

Приклад 13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}=\frac{1}{6+5}-\frac{2}{6\cdot 2+5}+\frac{3}{6\cdot 3+5}-...+(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}+...$

Скористаємося ознакою Лейбніца. Маємо $a_n=\frac{n}{6n+5}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{6n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{6n}{n}+\frac{5}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6+\frac{5}{n}}=\frac{1}{6}\neq 0$$, тобто цей ряд є розбіжним.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{kn+(k+1)}$.

____

____

____

____

____

Приклад 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=-\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n-1}+\ldots$

Скористаємося ознакою Лейбніца. Маємо $a_n=\frac{1}{2n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{\infty}=0$, тобто цей інтеграл збігається.

Дослідимо ряд, складений з абсолютних величин членів цього ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

Застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x-1}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x-1}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\ln(2b-1)-\ln 1\right)=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\ln(2b-1)=\infty,$$ тобто

цей інтеграл є розбіжним. Отже, розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$. Тоді цей знакозмінний ряд збігається умовно.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{kn+(3k-1)}$.

____

____

____

____

Знайти область збіжності степеневого ряду.

Приклад 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}=\frac{2x}{1+1}=\frac{2^2x^2}{4+1}+\frac{2^3x^3}{9+1}+\ldots+\frac{2^n x^n}{n^2+1}+\ldots$

Це степеневий ряд. Скористаємося ознакою Д'Аламбера:

$$u_n=\frac{2^n x^n}{n^2+1},\ u_{n+1}=\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{2^n x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}2\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=2|x|.$$

Інтервал збіжності визначається нерівністю $2|x|<1$, звідси $|x|<\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$.

Дослідимо граничні точки цього інтервалу. При $x = \frac{1}{2}$ одержимо числовий ряд, членами якого є додатні числа: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. Для дослідження цього ряду на збіжність скористаємося інтегральною ознакою Коші:

$\int_{n=1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{1}^{b} = \lim_{b\to\infty} \left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 1 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Інтеграл збігається, отже, збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. При $x = -\frac{1}{2}$ одержимо знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$. Для цього дослідження використаємо ознаку Лейбніца.

Маємо $a_n = \frac{1}{n^2+1}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ збігається.

Таким чином, область збіжності ряду, який ми досліджували, дорівнює $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k+2)x^n}{n^2+(k+1)}$.

____

____

____

____

Приклад 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$

Це степеневий ряд. Скористаємося ознакою Д’Аламбера:

$u_n = \frac{x^n}{n}$, $u_{n+1} = \frac{2x^{n+1}}{n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = |x|.$$

Інтервал збіжності визначається нерівністю $|x| < 1$, звідси $|x| < 1$; $-1 < x < 1$.

Дослідимо граничні точки цього інтервалу. При $x = 1$ одержимо числовий ряд, членами якого є додатні числа: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Для дослідження цього ряду на збіжність скористаємося інтегральною ознакою Коші:

$\int\limits_{n=1}^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty$. Інтеграл є розбіжним, отже, розбіжним і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. При $x=-1$ одержимо знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Для цього дослідження використаємо ознаку Лейбніца.

Маємо $a_n=\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ збігається.

Таким чином, область збіжності ряду, який ми досліджували, дорівнює $(-1;1]$.

Приклад для самостійної роботи $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+k)}$.

____

____

____

____

Приклад 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}=\frac{x-2}{2}=\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(x-2)^3}{2^3}+\ldots+\frac{(x-2)^n}{2^n}+\ldots$

Це степеневий ряд. Скористаємося ознакою Д'Аламбера:

$u_n=\frac{(x-2)^n}{2^n}$, $u_{n+1}=\frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(x-2)^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)}{2}\right|=\left|\frac{x-2}{2}\right|$.

Інтервал збіжності визначається нерівністю $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$, звідси $|x-2|<2$; $-2<x-2<2$, $0<x<4$.

Дослідимо граничні точки цього інтервалу. При $x=0$ одержимо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+\ldots+(-1^n)+\ldots$, який є знакозмінним. Дослідимо його за ознакою Лейбніца: $a_n=1^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1)^n=\infty$. Отже, ряд збігається. При $x=4$ одержимо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1)^n=1+1+\ldots+1^n+\ldots$ Він є розбіжним, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\infty$.

Таким чином, область збіжності ряду, який ми досліджували, дорівнює (0; 4).

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-k)^n}{(k+1)^n}$.

Приклад 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\frac{x}{1!}=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$

Це степеневий ряд. Скористаємося ознакою Д'Аламбера:

$u_n=\frac{x^n}{n!}$, $u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=|x|\cdot 0=0<1$ при довільних значеннях x.

Таким чином, область збіжності ряду, який ми досліджували, дорівнює (– ∞; ∞).

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+k)!}$.

Приклад 5. $\sum_{n=1}^{\infty}(2+x)^n=(2+x)+(2+x)^2+(2+x)^3+...+(2+x)^n+...$

Це степеневий ряд. Скористаємося ознакою Д'Аламбера:

$u_n=(2+x)^n$, $u_{n+1}=(2+x)^{n+1}$. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2+x)^{n+1}}{(2+x)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}|(2+x)|=|2+x|$.

Інтервал збіжності визначається нерівністю $|2+x|<1$, звідси $-1<2+x<1$; $-3<x<-1$.

Дослідимо граничні точки цього інтервалу. При $x=-3$ одержимо числовий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, який є розбіжним, оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$. При $x=-1$ одержимо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, який є розбіжним, оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$.

Таким чином, область збіжності ряду, який ми досліджували, дорівнює $(-3;-1)$.

Приклад для самостійної роботи $\sum_{n=1}^{\infty}(x-k)^n$.

____

____

____

____

Приклад 6. Використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити визначений інтеграл із точністю до 0,001: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.

Скористаємося формулою $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$

Запишемо ряд для підінтегральної функції:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Він збігається на всій числовій осі, тому його можна всюди почленно інтегрувати. Отже,

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\ldots\right)dx=x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\ldots\Big|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{18}+\frac{1}{720}-\ldots=1-0.0556+0.0014-\ldots=0.946.$$

Оскільки четвертий член одержаного знакозмінного ряду менший за $\delta=0.001$, то ми відкинули всі члени ряду, починаючи з четвертого.

Отже, $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\approx 0.946$.

Приклад для самостійної роботи $\int_0^1 \frac{\cos kx}{x} dx$.

Приклад 7. $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Скористаємося формулою $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

Запишемо ряд для підінтегральної функції:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{-\frac{x^2}{2}}{1!} + \frac{\frac{x^4}{4}}{2!} - \frac{\frac{x^6}{8}}{3!} + \ldots + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} + \ldots$$

Він збігається на всій числовій осі, тому його можна всюди почленно інтегрувати. Отже,

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1!} + \frac{x^4}{4 \cdot 2!} - \frac{x^6}{8 \cdot 3!} + \ldots\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 4 \cdot 2} - \frac{x^7}{7 \cdot 8 \cdot 6} + \ldots\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} + \ldots \approx 0.855.$$

Оскільки четвертий член одержаного знакозмінного ряду менший за $\delta = 0.001$, то ми відкинули всі члени ряду, починаючи з п’ятого.

Отже, $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0.855$.

Приклад для самостійної роботи $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{k}} dx$.

Приклад 8. $\int\limits_0^1 \cos\frac{x^2}{4}dx$.

Скористаємося формулою $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$

Запишемо ряд для підінтегральної функції:

$$\cos\frac{x^2}{4} = 1 - \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Він збігається на всій числовій осі, тому його можна всюди почленно інтегрувати. Отже,

$$\int\limits_0^1 \cos\frac{x^2}{4}dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{16\cdot 2!} + \frac{x^8}{64\cdot 4!} - \ldots\right)dx = \left(x - \frac{x^5}{5\cdot 32} + \frac{x^9}{9\cdot 64\cdot 24} - \ldots\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{160} + \frac{1}{13824} -$$

$-\ldots \approx 0.994$.

Приклад для самостійної роботи $\int\limits_0^1 \sin\frac{x}{k}dx$.

Приклад 9. Знайти розвинення у степеневий ряд за степенями $x-1$ розв'язку диференціального рівняння $y' = 2x + y^3$ $y(1) = 1$ (записати три перших відмінних від нуля члени цього розвинення).

Точка $x = 1$ не є особливою для цього рівняння, тому його розв'язок можна шукати у вигляді ряду:

$$y(x) = g(1) + \frac{f'(1)}{1!}\cdot(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}\cdot(x-2)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}\cdot(x-1)^3 + \ldots$$

$y'(1) = 2 + 1 = 3;$

$y'' = 2 + 3y^2\cdot y'$; $y''(1) = 2 + 3\cdot 1^2\cdot 3 = 2 + 9 = 11;$

$y(x) = 1 + \frac{3}{1}(x-1) + \frac{11}{2}(x-1)^2 + \ldots$ – розвинення розв'язку диференціального рівняння.

Приклад для самостійної роботи $y' = kx + (k+2)y^4$, $y(2) = 1$.

Приклад 10. Знайти розвинення у степеневий ряд за степенями $x-1$ розв’язку диференціального рівняння $y' = x^2 + y^2$ $y(1) = 1$ (записати три перших відмінних від нуля члени цього розвинення).

Точка $x = 1$ не є особливою для цього рівняння, тому його розв’язок можна шукати у вигляді ряду:

$$y(x) = g(1) + \frac{f'(1)}{1!}\cdot(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}\cdot(x-2)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}\cdot(x-1)^3 + \ldots$$

$y'(1) = 1^2 + 1^2 = 2$;

$y'' = 2x + 2y\cdot y'$; $y''(1) = 6$;

$y(x) = 1 + \frac{2}{1}(x-1) + \frac{6}{2}(x-2)^2 + \ldots$ – розвинення розв’язку диференціального рівняння.

Приклад для самостійної роботи $y' = (k+1)x^3 - (k+2)y^2$, $y(1) = 0$.

Навчальне видання

4346 Робочий зошит
із дисципліни «Вища математика»
на тему «Ряди»
для студентів усіх інженерних спеціальностей
денної форми навчання

Відповідальний за випуск І. О. Шуда
Редактор Н. З. Клочко
Комп’ютерне верстання М. А. Руденко

Підписано до друку 24.01.2018, поз.
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,66. Тираж 20 пр. Зам. №
Собівартість вид.   грн   к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.