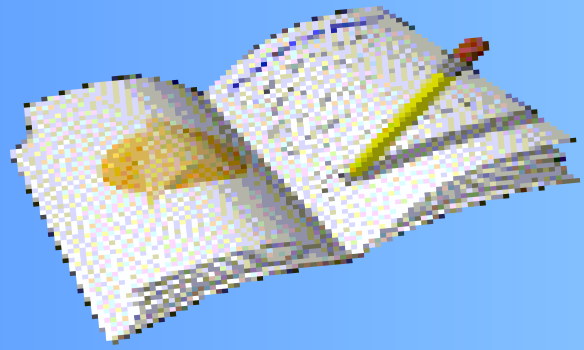
Заняття 2
Лінійна функція. Лінійні рівняння. Лінійні рівняння з параметром.



Лінійна функція

Лінійна функція-

це функція виду $y=kx+b$,

де x –незалежна змінна, k і b – деякі числа

й $y=-x+4$

н $y=0,9x$

м $y=x^2-5x$

Л $y= 6$

і $y-2x+5=0$

б $y=8x-9$

ц $y=3-7x$

е $y=4x-5$

Знайдіть лінійні функції і зроби клік мишею по формулі

Властивості функції	Види функції (k≠o) $y=kx+b,\ k>0$	$y=kx+b,\ k<0$
Область визначення	Всі числа (x є R)	Всі числа (x є R)
Множина значень	Всі числа (y є R)	Всі числа (y є R)
Додатні значення	$x>-\frac{b}{k}$	$x<-\frac{b}{k}$
Від‘ємні значення	$x<-\frac{b}{k}$	$x>-\frac{b}{k}$
Проміжки зростання	Всі числа (x є R)	-------------------------
Проміжки спадання	-------------------------------	Всі числа (x є R)

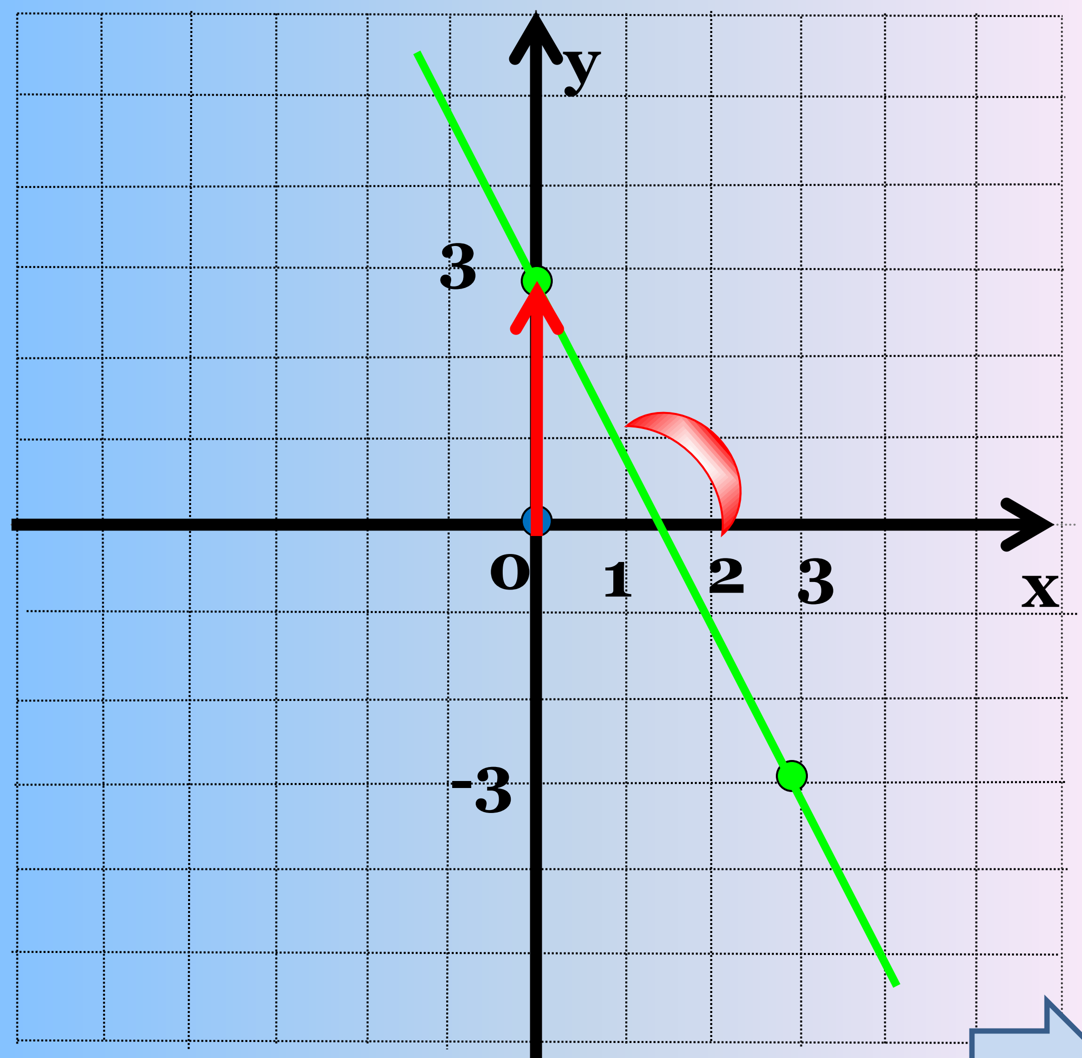
Графіком лінійної функції $y = kx + b$ є **пряма.**

$y=-2x+3$

x	0	3
y	3	-3

$k= -2$ $b= 3$

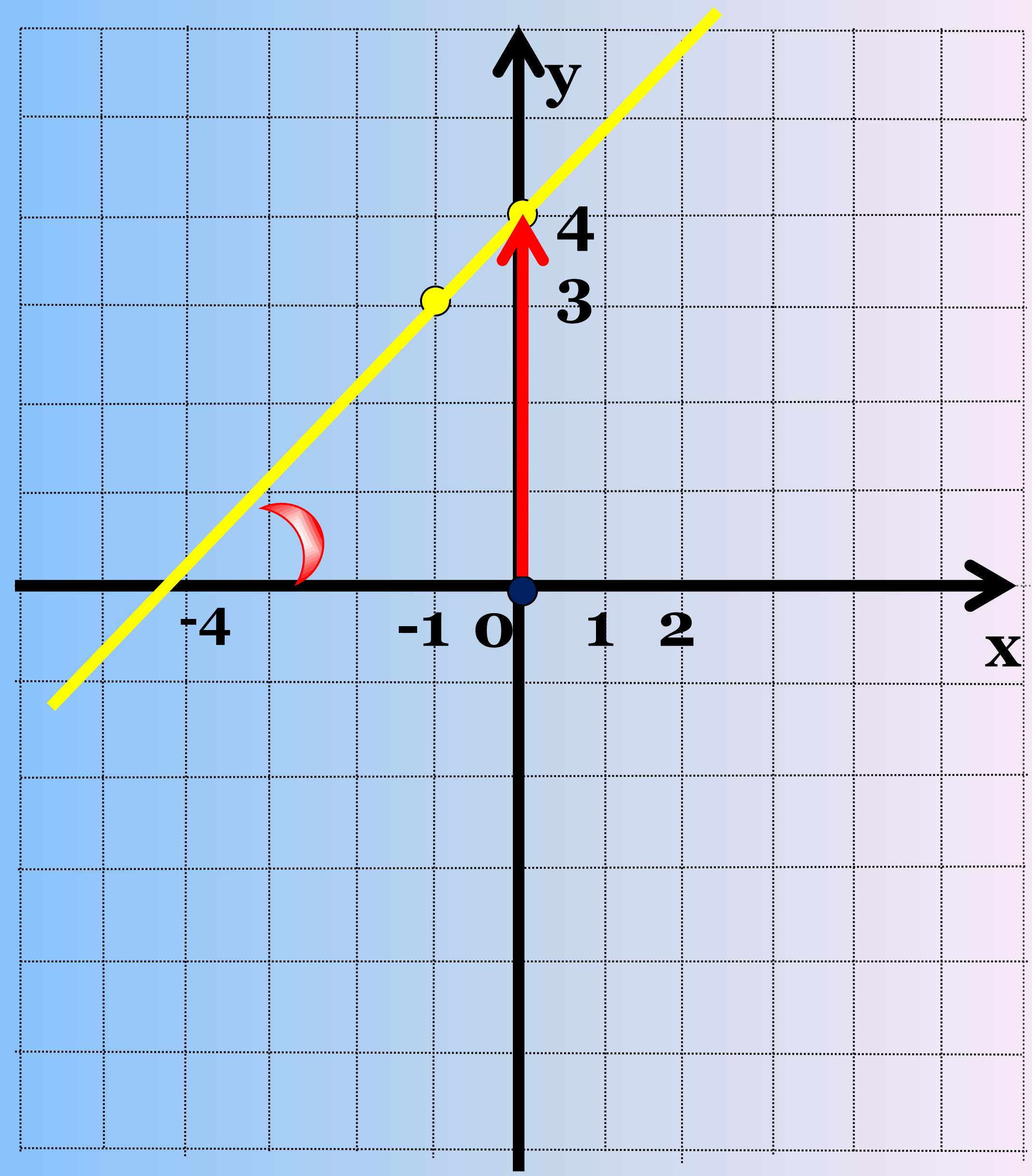
k-кутовий коефіцієнт



Побудувати графік функції

$y=x+4$

x	0	-1
y	4	3



$k= 1$

$b= 4$

Функція y= kx (k≠0) називається прямою пропорційністю

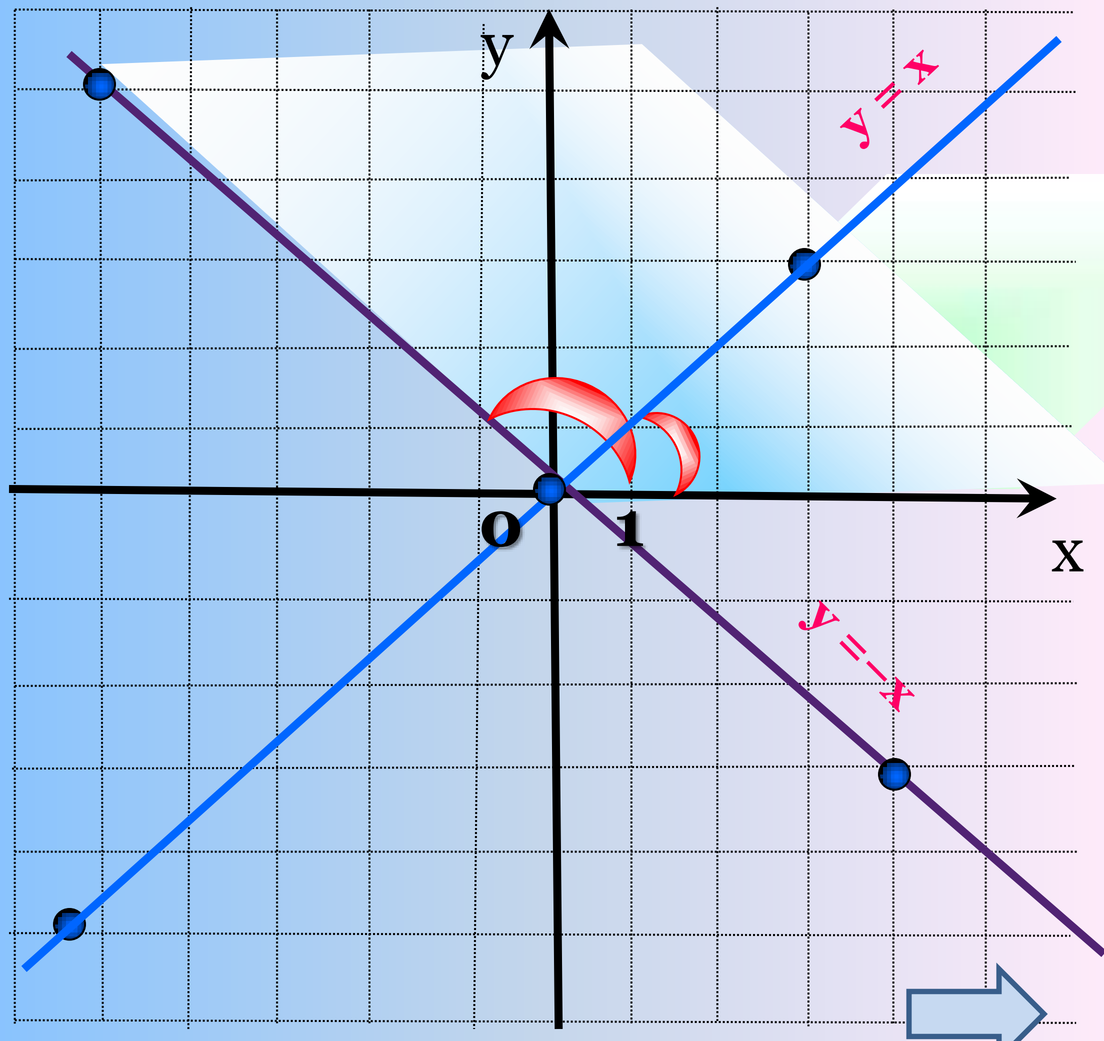
Графіком функції є **пряма**, що проходить через початок координат.

Пряма **y = x**

(3 ; 3), (- 5 ; - 5)

Пряма **y = – x**

(4 ;- 4), (- 5 ; 5)



Якщо k=0,то функція y=kx+b має вигляд y=b

y= 4

y= - 2

Графіки функцій паралельні осі Ox

Побудуйте графіки функцій

I $y = 3x$

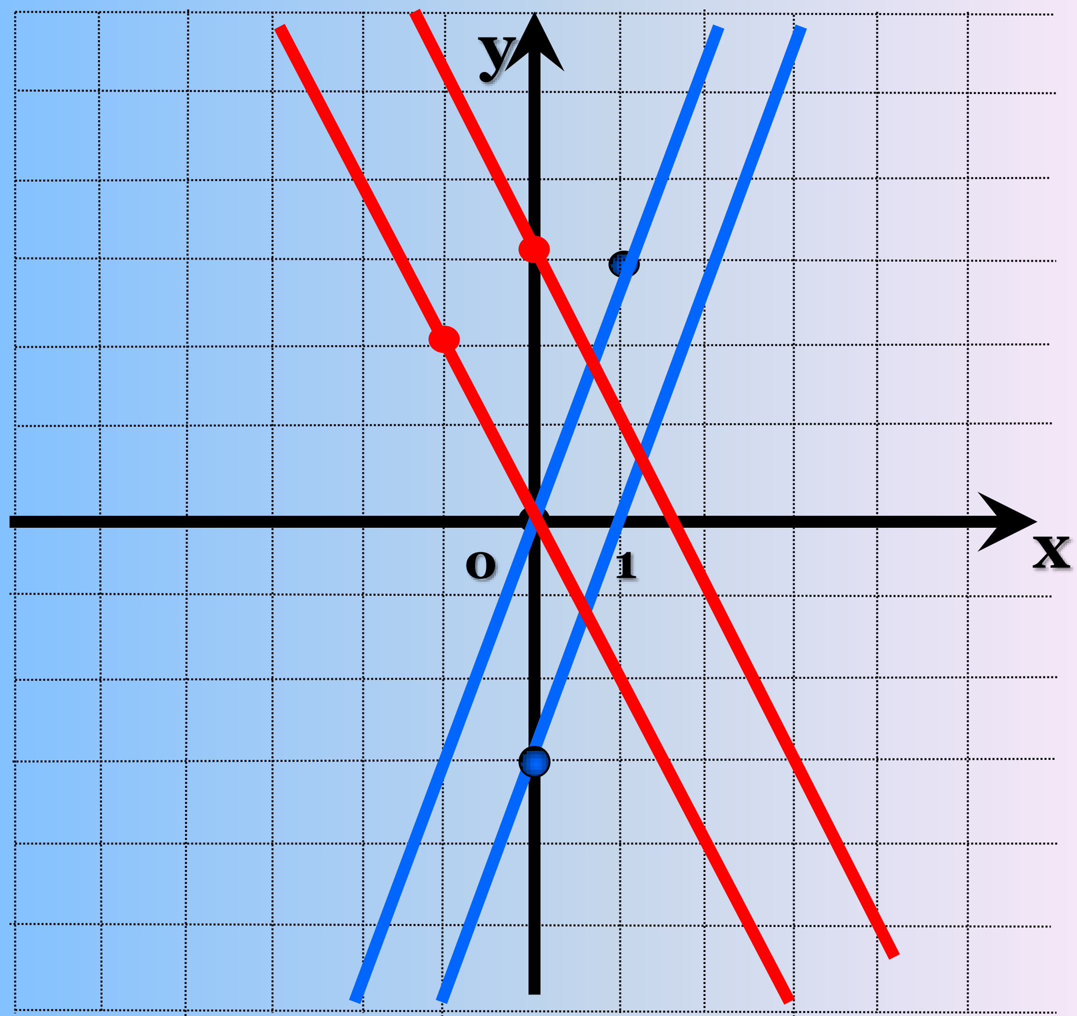
II $y = 3x - 3$

$k_1 = k_2 =$?

III $y = -2x$

IV $y = -2x + 3$

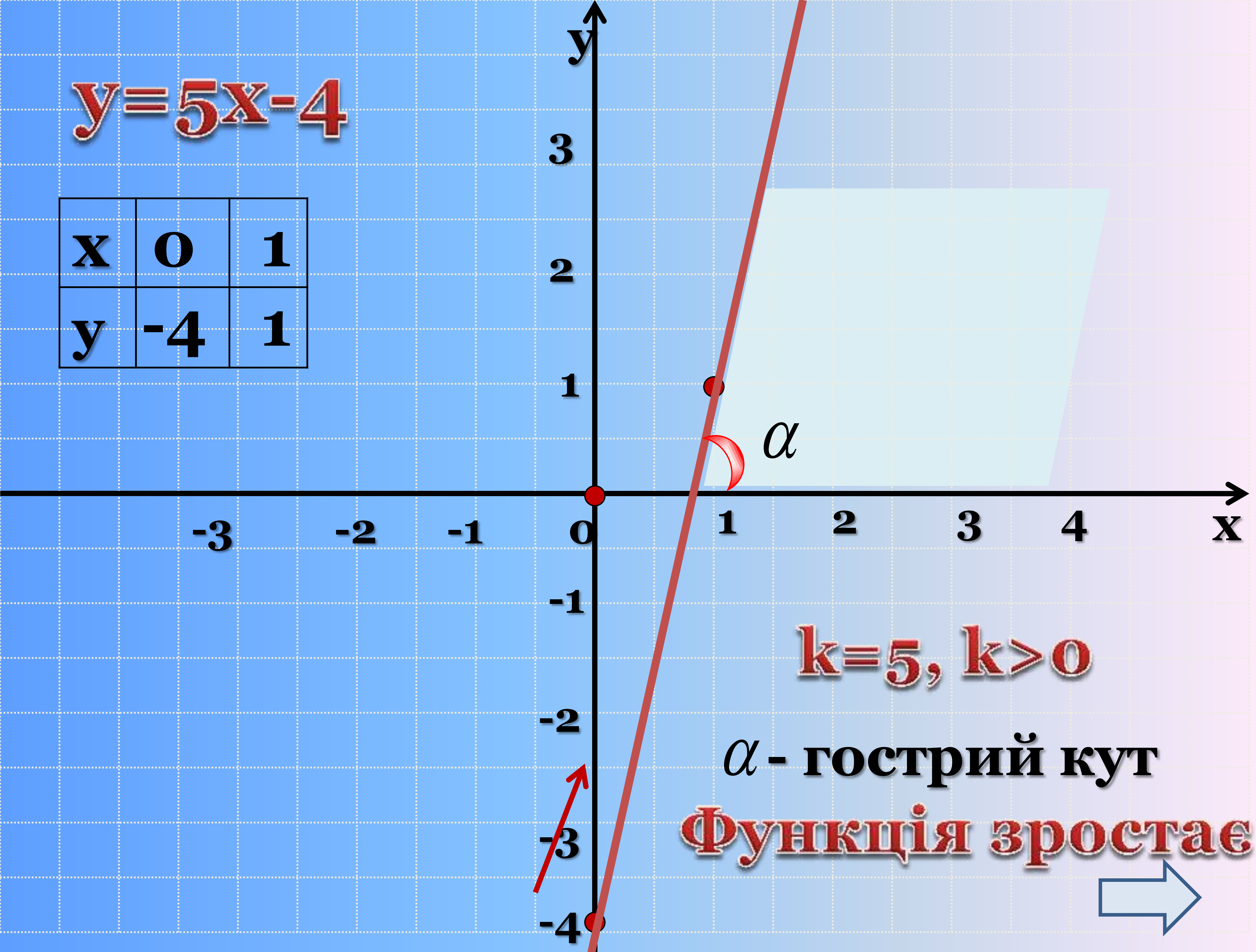
$k_1 = k_2 =$?



Якщо $k_1 = k_2$, то графіки функцій паралельні.

$y=5x-4$

x	0	1
y	-4	1



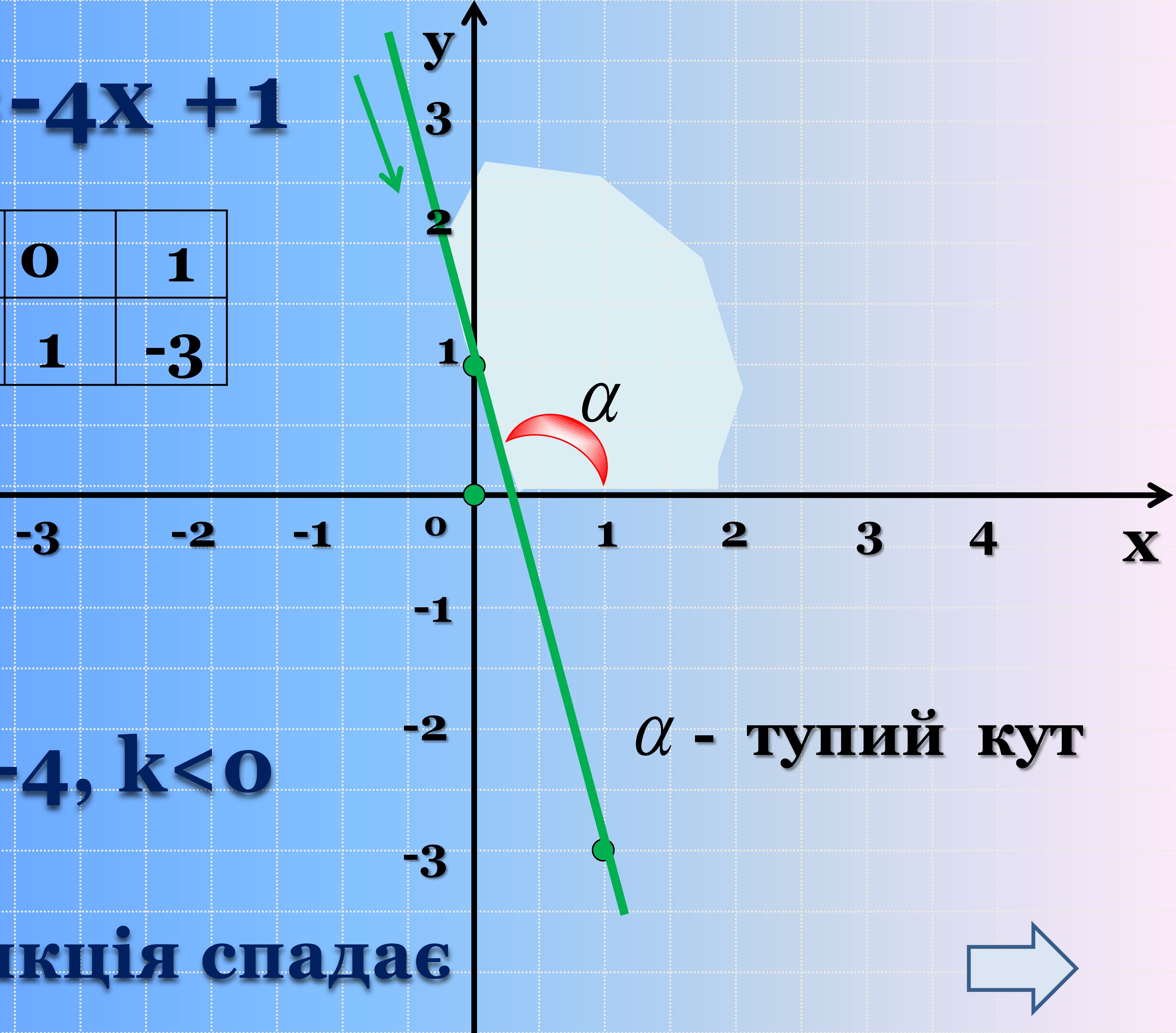
$k=5$, $k>0$

α - гострий кут

Функція зростає

$$y=-4x+1$$

x	0	1
y	1	-3

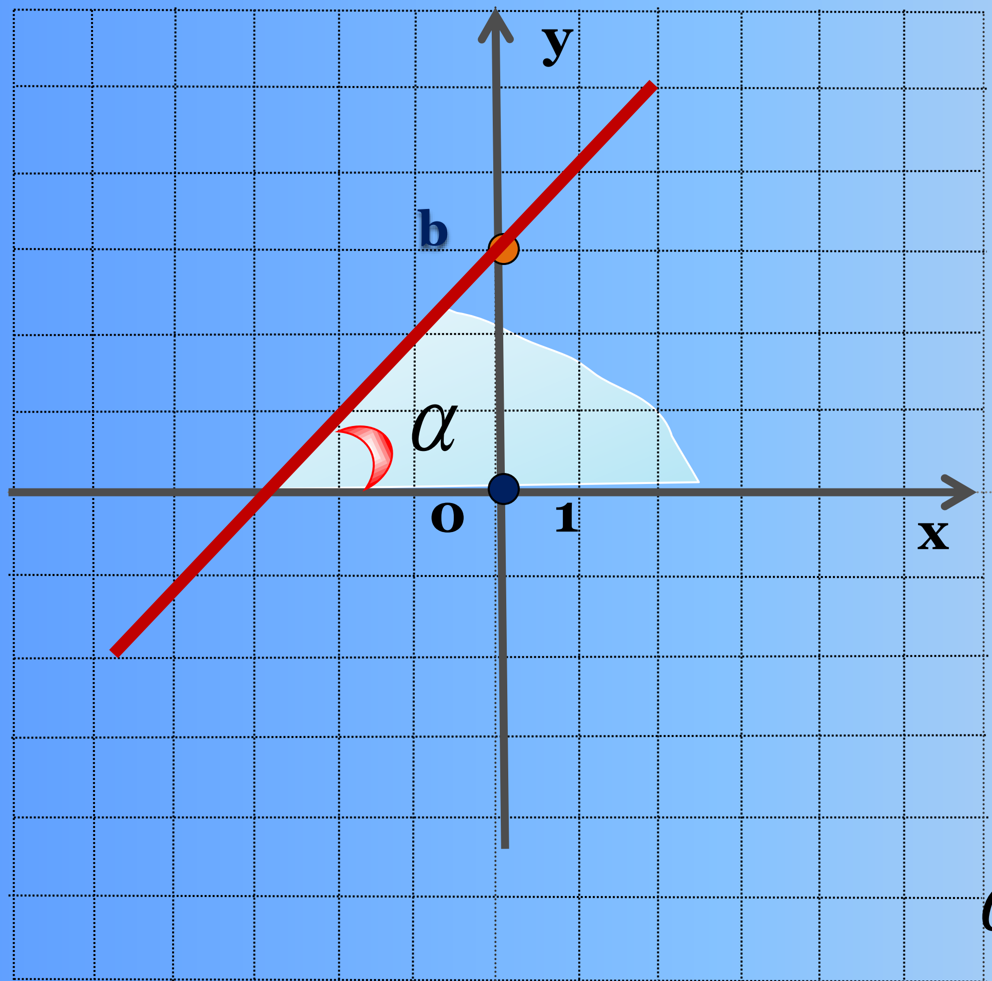


α - тупий кут

$k=-4,\ k<0$

Функція спадає

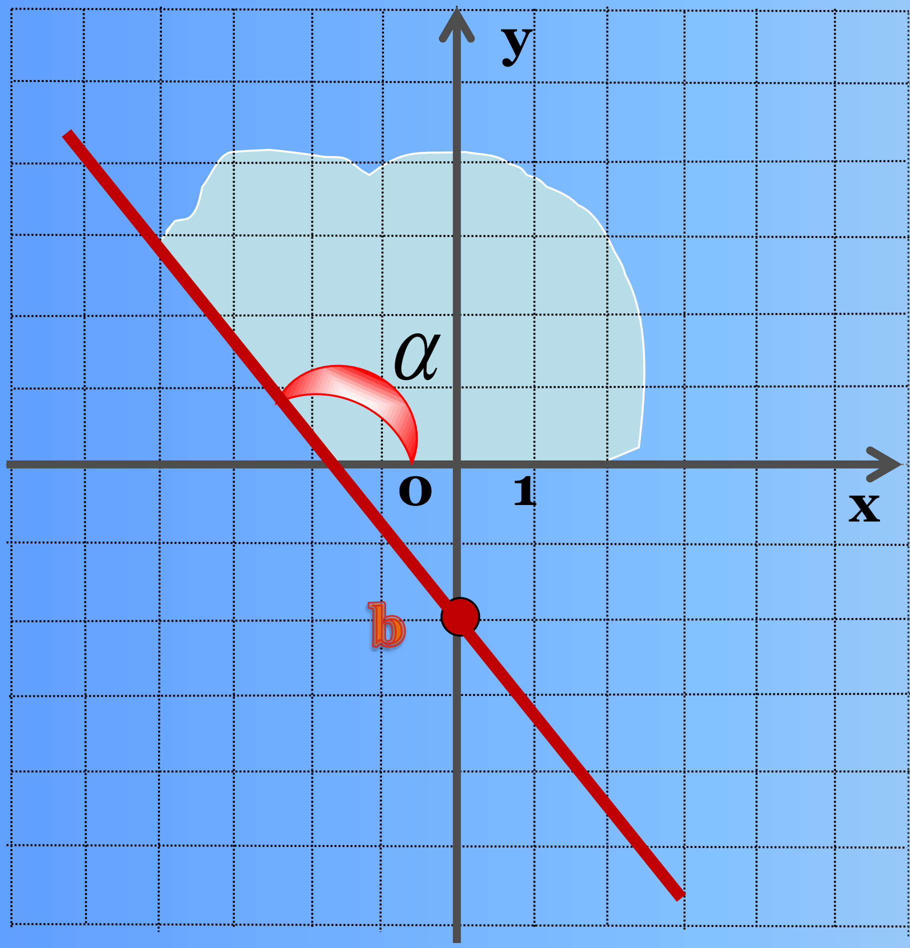
Визначте знаки коефіцієнтів k і b, для цього зроби клік мишкою на вірне твердження.



1. b<o, k>o
2. b>o, k<o
3. b>o, k>o
4. b<o, k<o

α -гострий кут

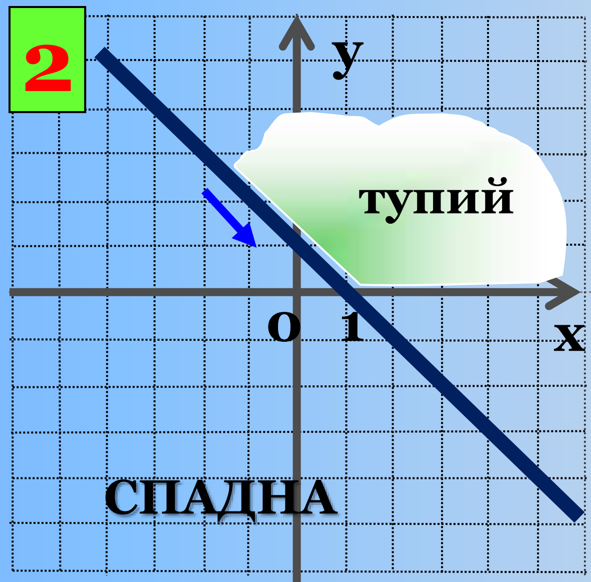
Знайди правильну відповідь

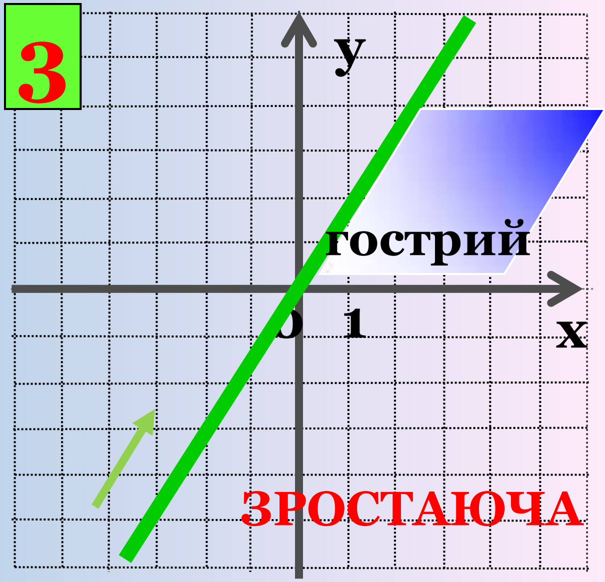


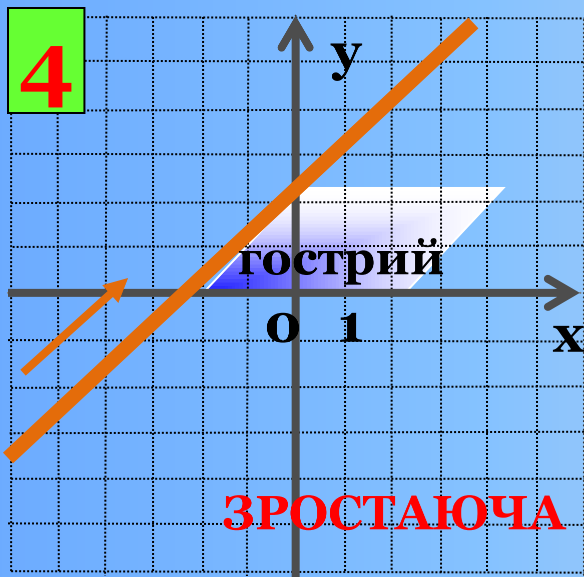
1. $b<0, k>0$
2. $b>0, k>0$
3. $b>0, k<0$
4. $b<0, k<0$

α -тупий кут

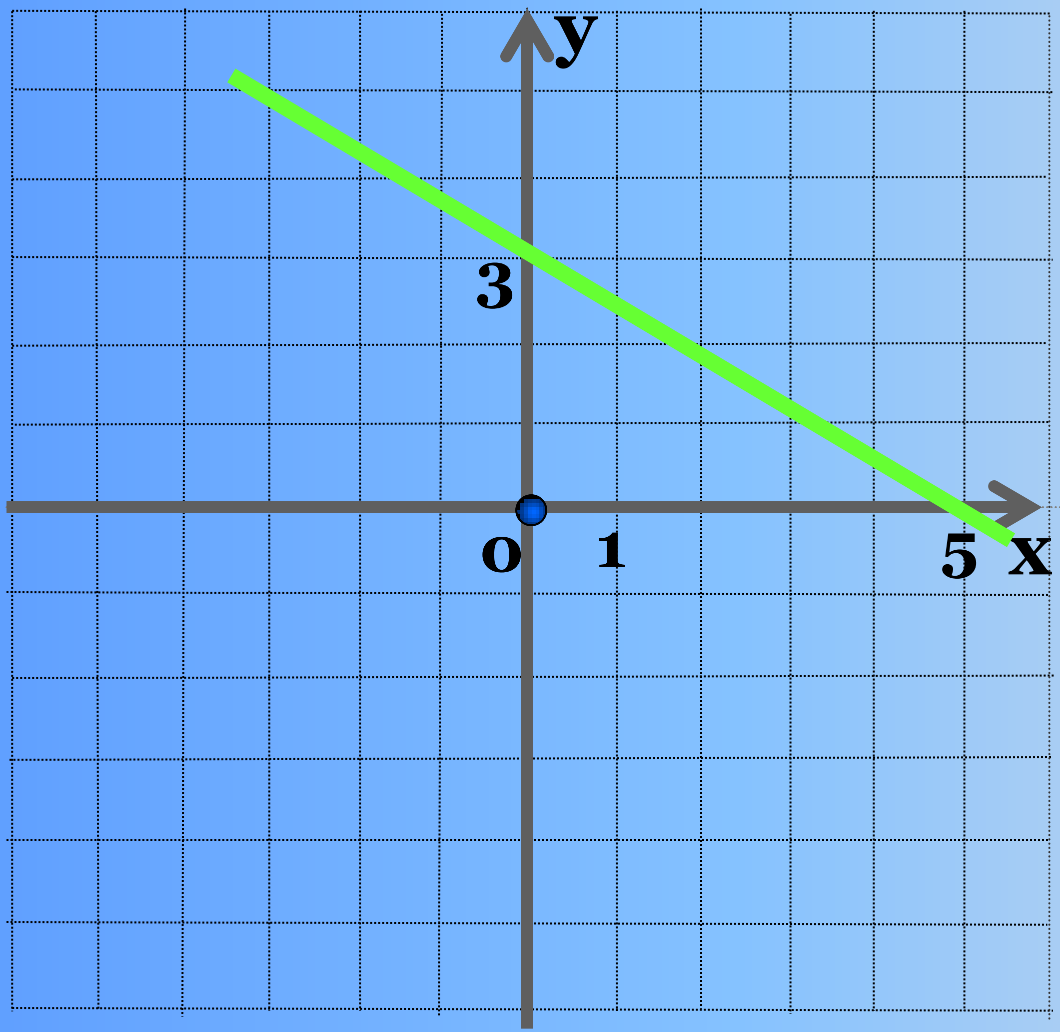
Знайди зростаючі лінійні функції
і зроби клік мишею по квадратику з цифрою.





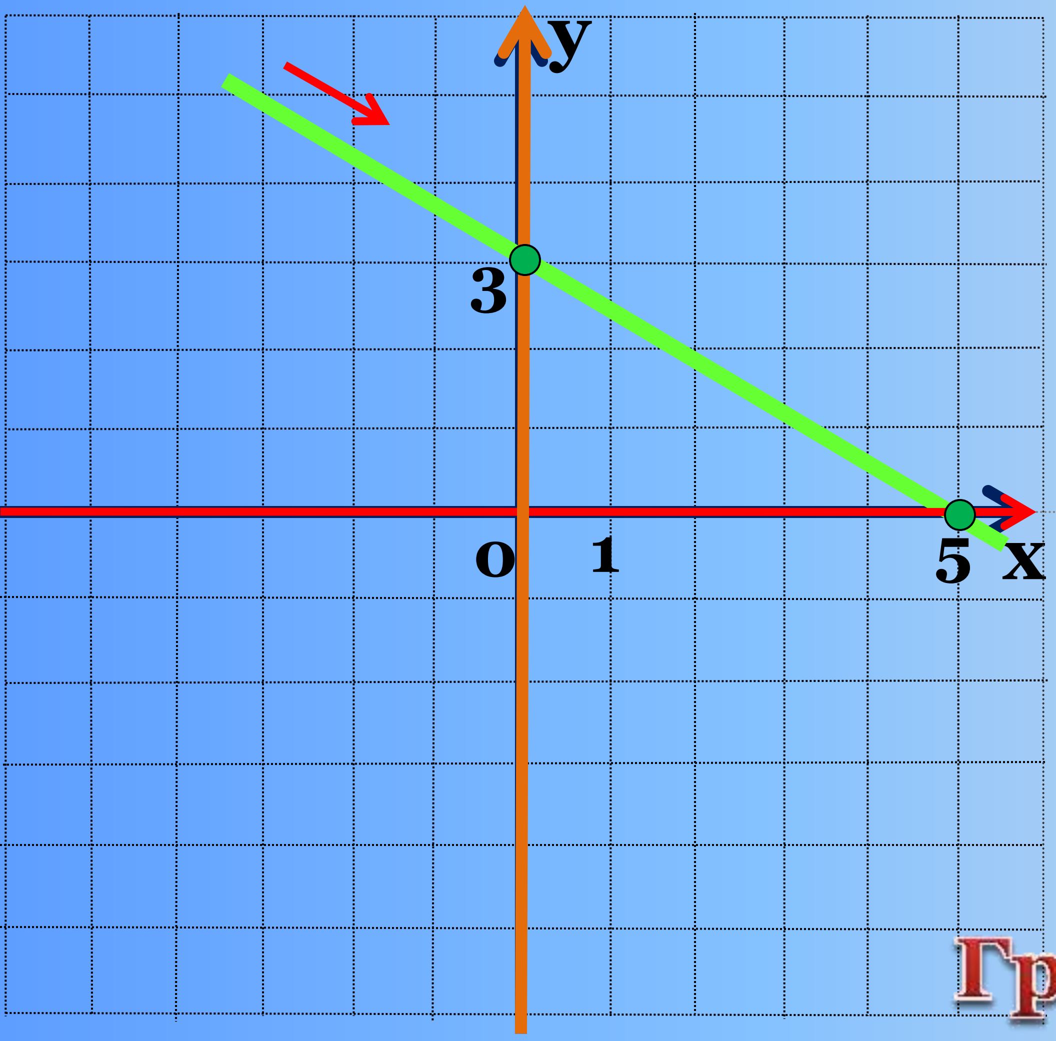


Функцію задано графічно.
Знайди формулу функції та виконай дослідження функції за її графіком.



1. $y=-3x+5$
2. $y=-0,6x+3$
3. $y=-5x-3$
4. $y=0,5x-3$

y=-0,6x+3



Властивості:

1. D(y): x∈R
2. E(y): y∈R
3. Точки перетину з осями координат: (5;0), (0;3).
4. k=-0,6, k<0 Функція спадає на D(y).

Графіком функції є пряма.

Побудуйте графік функції

$$y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Область визначення: х≠3

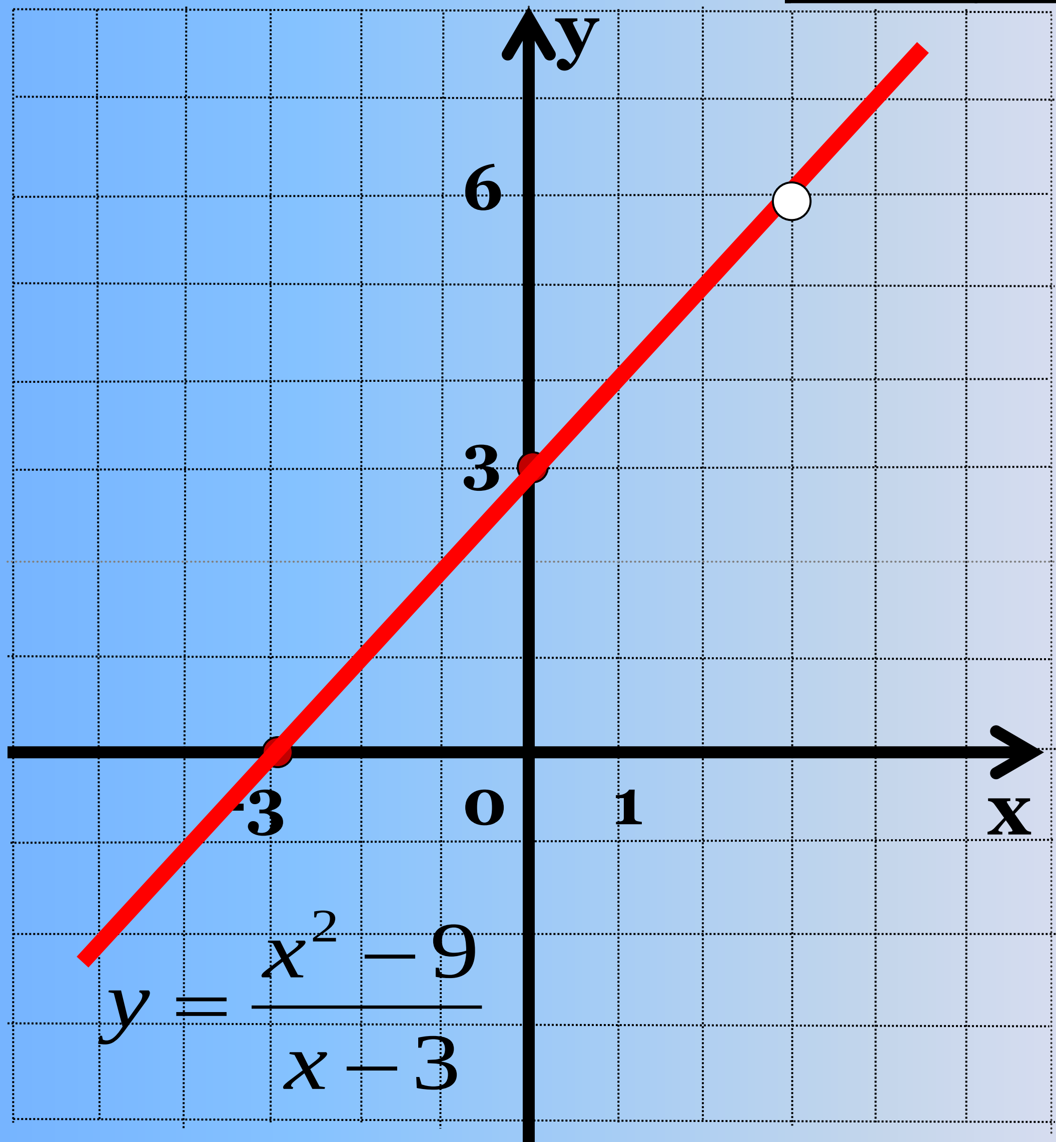
$$y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3;$$

$$y = x+3, x \neq 3$$

Графіком цієї функції є пряма,
з якої виключена точка з координатою (3;6)

$y = x + 3,$ $x \neq 3$

x	0	-3
y	3	0



$$y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$x \neq 3$

$y \neq 6$

Побудуйте графік функції

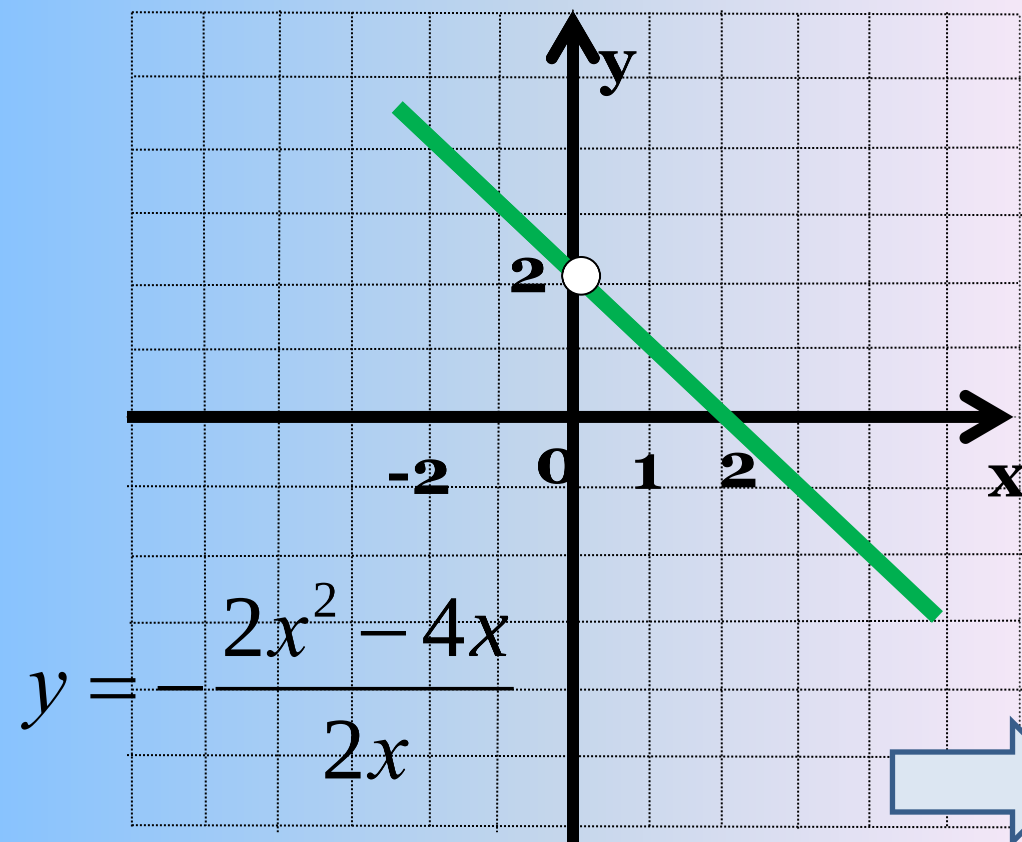
$$y = -\frac{2x^2 - 4x}{2x}$$

Перетворення

$$y = -\frac{2x^2 - 4x}{2x} = -\frac{2x(x-2)}{2x} = -x + 2, x \neq 0$$

$$\boxed{y = -x + 2, x \neq 0.}$$

ГРАФІК



Підведемо підсумки попередньої презентації

Означення: Лінійною називається функція, яку можна задати формулою $y = kx + b$, де x - незалежна змінна, k *і* b - деякі числа.

Графіком лінійної функції є пряма.

Число k називається кутовим коефіцієнтом, $k = tg\alpha$, де α - кут , що утворює пряма з додатнім напрямком осі Ox. Число b називають вільним членом. Воно дорівнює ординаті точки перетину графіка з віссю Oy.

Часткові випадки лінійної функції:

1) при $k = 0$ функція має вигляд $y = b$ і називається *постійною* функцією, графіком якої є пряма лінія паралельна осі Ox.

2) При $b = 0$ функція приймає вигляд $y = kx$ і називається прямою пропорційністю, графіком якої є пряма лінія, що проходить через початок координат.
Вона розташована у I і III координатних четвертях при $k > 0$ та у II і IV координатних четвертях при $k < 0$.

Взаємне розташування графіків лінійних функцій.

Прямі лінії на площині можуть перетинатись, бути паралельними і співпадати.
Розглянемо всі можливі випадки для функцій
$y_1 = k_1 x + b_1$ і $y_2 = k_2 x + b_2$:

1) якщо $k_1 \neq k_2$, то прямі лінії перетинаються;
2) якщо $k_1 = k_2$, а $b_1 \neq b_2$ - лінії паралельні;
3) якщо $k_1 = k_2$, а $b_1 = b_2$ - лінії співпадають.

Слід зауважити, що у випадку перетину ліній корисно знати умову перпендикулярності прямих

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Лінійні рівняння

Скульптурний портрет аль-Хорезмі
Хіва: Музей просто неба

У IX ст. видатний арабський математик **Мухаммед бен Муса аль-Хорезмі** у своєму трактаті «Кітай аль-джебр валь-мукабала» («Книга про відновлення та протиставлення») зібрав і систематизував методи розв'язування рівнянь. Слово «аль-джебр» з часом перетворилось в добре відоме всім слово «алгебра», а сама праця вченого стала поштовхом для розвитку науки про розв'язування рівнянь.

Означення: Рівняння виду $ax = b$, де
x - змінна,
a і b - деякі числа, називається лінійним рівнянням з однією змінною.
З'ясуємо, скільки коренів може мати лінійне рівняння.

Дослідимо розв’язки лінійного рівняння $a \cdot x = b$:

1. Якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний розв’язок

$$x = -\frac{b}{a}.$$

2. Якщо $a = 0$, то рівняння набуває вигляду

$$0 \cdot x = -b.$$

Кількість розв’язків такого рівняння залежить від значення b:

а) якщо $b = 0$, то це рівняння має вигляд $0 \cdot x = 0$, а тому його розв’язком може бути будь-яке дійсне число;

б) якщо $b \neq 0$, то це рівняння має вигляд $0 \cdot x = -b$ і не має розв’язків.

Дане дослідження можна розглянути у вигляді схеми

Приклади розв'язання лінійних рівнянь:

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{16-x}{8}-\frac{18-x}{12}=0$.

Помножимо обидві частини рівняння на число 24,
 яке дорівнює НСК знаменників дробів.
Одержуємо рівняння

$$3(16-x)-2(18-x)=0,$$

$$48-3x-36+2x=0,$$

$$-x=36-48,$$

$$x=12.$$

Відповідь: 12

Приклад 2. Знайти корінь рівняння $2x+5=2(x+6)$,

$$2x+5=2x+12,$$

$$2x-2x=12-5,$$

$$0\cdot x=7.$$

Відповідь: коренів немає.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $3(x+2)+x=6+4x$,

$$3x+6+x=6+4x,$$

$$4x-4x=6-6,$$

$$0\cdot x=0.$$

Відповідь: x - будь-яке дійсне число.

Завдання для самостійного виконання

1. Знайти корінь рівняння:

а) $2x+5=2(x+1)+11$;

б) $5(2y-4)=2(5y-10)$;

в) $3y-(y-19)=2y$;

г) $6y-(y-4)=4+5y$.

2. Розв'язати рівняння:

а) $\frac{x-15}{2}-\frac{2x+1}{8}+1=0$;

б) $\frac{2x-3}{4}-3x=\frac{x+1}{2}$;

в) $6=\frac{3x-1}{3}-\frac{x}{5}$;

г) $\frac{2}{3}(x+3)=\frac{6+2x}{3}$.

3. На дошці записане деяке число. Один учень збільшив це число на 23, а інший зменшив на 1. результат першого виявився в 7 разів більшим, ніж результат другого. Яке число записане на дошці?

4. Один кавун на 2кг легший, ніж другий, і в 5 разів легший, ніж третій. Перший і третій кавуни разом у 3 рази важчі, ніж другий. Знайти масу кожного кавуна.

Лінійні рівняння з параметром

Рівняннями з параметрами *називаються рівняння виду*

$$f\left(x; a_1; a_2; a_3; ...; a_n\right) = 0,$$

де x - шукане невідоме, а $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ - змінні параметри. Значення параметрів $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$, при яких вираз $f\left(x; a_1; a_2; a_3; ...; a_n\right) = 0$ має зміст при деяких значеннях x, називаються ***допустимими***.

Розв’язати рівняння з параметрами – це означає вказати при яких значеннях параметрів існують розв’язки і які вони. При розв’язуванні рівнянь з параметрами область зміни параметрів має бути заданою. Якщо не вказані межі змін параметрів, то вважається, що параметри набувають усіх своїх допустимих значень.

Типи рівнянь з параметрами:

- розв’язування рівняння для будь-якого значення параметра;
- знаходження значень параметра, при яких рівняння має розв’язки;
- знаходження значень параметра, при яких рівняння має вказану кількість розв’язків;
- знаходження значень параметра, при яких розв’язки рівняння задовольняють вказану умову.

Методи розв’язування:

- аналітичний;
- графічний.

При розв’язуванні рівнянь аналітичним способом можна сформулювати деякі загальні положення, дотримання яких дає певні орієнтири в процесі досліджень. А саме:

1. Встановлюють ОДЗ змінної, а також ОДЗ параметрів.

2. Виражають змінну через параметри.

3. Для кожного допустимого значення параметра знаходять множину всіх коренів даного рівняння. Якщо параметрів кілька, то множину коренів шукають, звичайно, для певного співвідношення між параметрами.

4. Досліджують особливі значення параметра, при яких корені рівняння існують, але не виражаються формулами, які отримали.

Розв'язувати рівняння з параметрами графічним способом зручно за таким алгоритмом:

1. Знаходимо область допустимих значень рівняння.
2. Виражаємо a як функцію від x.
3. У прямокутній системі координат будуємо графік функції $a = f(x)$ для тих значень х, які входять в область допустимих значень даного рівняння.
4. Знаходимо точки перетину прямої a=с, де с є (-∞;+∞) з графіком функції $a = f(x)$. Якщо пряма $a = c$ перетинає графік $a = f(x)$, то знаходимо абсциси точок перетину. Для цього досить розв'язати рівняння $a = f(x)$ відносно х.
5. Записуємо відповідь.

Приклад 4.

Розв'язати рівняння $ax = x - a + 1$ відносно x.

Розв'язання.

$$ax - x = -a + 1$$

$$(a-1)\cdot x = 1 - a$$

1) якщо $a - 1 \neq 0$, тобто $a \neq 1$, то рівняння має єдиний розв'язок

$$x = \frac{1-a}{a-1} = -1;$$

2) якщо $a - 1 = 0$, тобто $a = 1$, то рівняння набуває вигляду $0 \cdot x = 0$ розв'язком якого буде будь-яке число $x \in R$.

Відповідь: $x = -1$, при $a \neq 1$;

$x \in R$, при $a = 1$.

Приклад 5.

Визначити, при яких значеннях k рівняння

$\frac{4x+3k}{3}=\frac{5x-2k}{4}$ має від'ємні розв'язки .

Розв'язання.

$$4(4x+3k)=3(5x-2k);$$

$$16x-15x=-6k-12k;$$

$$x=-18k$$

Дане рівняння при довільних значеннях параметра k може мати лише один розв'язок, який за умовою має бути від'ємним, тобто $-18k<0$, $k>0$.

Відповідь: $k>0$.

Приклад 6.

Розв’язати рівняння $6(bx-1)-b=2(b+x)-7$ відносно *x*.

Розкриємо дужки і приведемо рівняння до вигляду лінійного

$$6(bx-1)-b=2(b+x)-7\,;$$
$$6bx-6-b=2b+2x-7\,;$$
$$6bx-2x=2b-7+6+b\,;$$
$$(6b-2)\cdot x=3b-1\,;$$

Дослідимо розв’язки одержаного рівняння

1) якщо $6b-2\neq 0$, $b\neq\frac{1}{3}$, то рівняння має один розв’язок $x=\frac{3b-1}{6b-2}=\frac{1}{2}$.

2) якщо $6b-2=0$, $b=\frac{1}{3}$, то набуває вигляд $0\cdot x=0$ розв’язком якого є будь-яке дійсне число, тобто $x\in R$.

Відповідь: якщо $b\neq\frac{1}{3}$, то $x=\frac{1}{2}$, якщо $b=\frac{1}{3}$, то $x\in R$.

Приклад 7.

Розв’язати рівняння $a^2x+1=a+ax$ відносно x.

Розв’язання.

$$a^2x+1=a+ax;$$
$$a^2x-ax=a-1;$$
$$\left(a^2-a\right)\cdot x=a-1;$$
$$a(a-1)\cdot x=a-1;$$

Дослідимо розв’язки одержаного рівняння:

1) якщо $a\neq 0$, $a\neq 1$, то рівняння має один корінь $x=\dfrac{a-1}{a\,(a-1)}=\dfrac{1}{a}$,

2) якщо $a=0$, то рівняння має вигляд $0\cdot x=-1$ і не має розв’язків,

3) якщо $a=1$, то розв’язком рівняння $0\cdot x=0$ буде $x\in R$.

Відповідь: при $a\neq 0$, $a\neq 1$ $x=\dfrac{1}{a}$; при $a=0$ розв’язків немає, при $a=1$ $x\in R$

.

Приклад 8.

Розв'язати рівняння $ax - b = x - a$ відносно x

Розв'язання.

Дане рівняння містить два параметра a і b

$$ax - b = x - a;$$
$$ax - x = b - a;$$
$$(a-1)\cdot x = b - a;$$

1) якщо $a \neq 1$, то рівняння має один корінь $x = \dfrac{b-a}{a-1}$,

2) якщо $a = 1$, то рівняння має вигляд $0 \cdot x = b - 1$

а) при $b = 1$ маємо $0 \cdot x = 0$, $x \in R$,

б) при $b \neq 1$ коренів немає.

Відповідь: $x = \dfrac{b-a}{a-1}$, якщо $a \neq 1$;

$x \in R$, якщо $a = 1$, $b = 1$;

коренів немає, якщо $a = 1$, $b \neq 1$.

Приклад 9.

Визначити, при яких значеннях параметра a рівняння $(x-1)\cdot(a-2)=1$ має корені, які знаходяться на інтервалі від 1 до 2.

Розв'язання.

1) $a=2$ - особливе значення параметра при якому рівняння розв'язків немає, бо має вигляд $(x-1)\cdot 0=1$.

2) при $a\neq 2$ маємо $x-1=\dfrac{1}{a-2}$, звідки $x=\dfrac{a-1}{a-2}$.

За умовою $1<x<2$, тому $1<\dfrac{a-1}{a-2}<2$. Розв'яжемо подвійну нерівність за допомогою системи нерівностей

$$\begin{cases}\dfrac{a-1}{a-2}<2,\\ \dfrac{a-1}{a-2}>1\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{a-1-2a+4}{a-2}<0,\\ \dfrac{a-1-a+2}{a-2}>0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{-a+3}{a-2}<0,\\ \dfrac{1}{a-2}>0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{a-3}{a-2}>0,\\ a>2\end{cases}\quad \begin{cases}a>3,\\ a>2.\end{cases}$$

Це можливо при $a>3$.

Відповідь: $a>3$.

Приклад 10.

При яких натуральних значеннях параметра a рівняння $a \cdot x = a + x + 1$ має парні корені.

Розв’язання.

$$a \cdot x = a + x + 1;$$

$$ax - x = a + 1;$$

$$(a - 1) \cdot x = a + 1.$$

При $a \neq 1$ корінь рівняння $x = \frac{a+1}{a-1}$ запишемо у вигляді $x = 1 + \frac{2}{a-1}$.

Отже, x - парне число, якщо вираз $\frac{2}{a-1}$ - непарне число.

Це можливо лише при $a = 3$.

Відповідь: $a = 3$.

Контрольні запитання:

1. Яка функція називається лінійною? Зміст коефіцієнтів k і b.
2. Графік та властивості лінійної функції.
3. Часткові випадки лінійної функції.
4. Взаємне розташування графіків лінійних функцій.
5. Означення лінійного рівняння та кількість його розв'язків.
6. Що означає розв'язати рівняння з параметром?

Типи рівнянь з параметрами та методи їх розв'язання.

Домашнє завдання:

Виконати домашнє завдання «Лінійна функція. Лінійні рівняння»
Текст домашнього завдання можна знайти на сайті кафедри МАіМО **http://maimo.elit.sumdu.edu.ua/** за посиланням «Інформація для студентів», викладач Захарченко Н. М., розділ «Домашнє завдання»

Ваші пропозиції та запитання чекаю на електронну адресу
znnmaimo@ukr.net