Заняття 4

Лінійна функція та лінійне рівняння з модулем

Викладач: Захарченко Надія Миколаївна

План проведення заняття

- Актуалізація опорних знань
- Основні питання теорії модулів
- Побудова графіків з модулями
- Рівняння з модулями
- Підсумок заняття

Означення: Лінійною називається функція, яку можна задати формулою $y = kx + b$, де x - незалежна змінна, k i b - деякі числа.

Графіком лінійної функції є пряма.

Число k називається кутовим коефіцієнтом, $k = tg\alpha$, де α - кут , що утворює пряма з додатнім напрямком осі Ox. Число b називають вільним членом. Воно дорівнює ординаті точки перетину графіка з віссю Oy.

Часткові випадки лінійної функції:

1) при $k = 0$ функція має вигляд $y = b$ і називається *постійною* функцією, графіком якої є пряма лінія паралельна осі Ox.

2) При $b = 0$ функція приймає вигляд $y = kx$ і називається прямою пропорційністю, графіком якої є пряма лінія, що проходить через початок координат.
Вона розташована у I і III координатних четвертях при $k > 0$ та у II і IV координатних четвертях при $k < 0$.

Взаємне розташування графіків лінійних функцій.

Прямі лінії на площині можуть перетинатись, бути паралельними і співпадати.
Розглянемо всі можливі випадки для функцій
$y_1 = k_1 x + b_1$ і $y_2 = k_2 x + b_2$:

1) якщо $k_1 \neq k_2$, то прямі лінії перетинаються;
2) якщо $k_1 = k_2$, а $b_1 \neq b_2$ - лінії паралельні;
3) якщо $k_1 = k_2$, а $b_1 = b_2$ - лінії співпадають.

Слід зауважити, що у випадку перетину ліній корисно знати умову перпендикулярності прямих

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Означення: Рівняння виду $ax = b$, де

x - змінна,

a і b - деякі числа, називається лінійним рівнянням з однією змінною.

З’ясуємо, скільки коренів може мати лінійне рівняння.

Дослідимо розв’язки лінійного рівняння $a \cdot x = b$:

1. Якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний розв’язок

$$x = -\frac{b}{a}.$$

2. Якщо $a = 0$, то рівняння набуває вигляду

$$0 \cdot x = -b.$$

Кількість розв’язків такого рівняння залежить від значення b:

а) якщо $b = 0$, то це рівняння має вигляд $0 \cdot x = 0$, а тому його розв’язком може бути будь-яке дійсне число;

б) якщо $b \neq 0$, то це рівняння має вигляд $0 \cdot x = -b$ і не має розв’язків.

Приклади розв'язання лінійних рівнянь:

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{16-x}{8}-\frac{18-x}{12}=0$.

Помножимо обидві частини рівняння на число 24,
 яке дорівнює НСК знаменників дробів.
Одержуємо рівняння

$$3(16-x)-2(18-x)=0,$$
$$48-3x-36+2x=0,$$
$$-x=36-48,$$
$$x=12.$$

Відповідь: 12

Приклад 2. Знайти корінь рівняння $2x+5=2(x+6)$,

$$2x+5=2x+12,$$

$$2x-2x=12-5,$$

$$0\cdot x=7.$$

Відповідь: коренів немає.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $3(x+2)+x=6+4x$,

$$3x+6+x=6+4x,$$

$$4x-4x=6-6,$$

$$0\cdot x=0.$$

Відповідь: x - будь-яке дійсне число.

Основні питання теорії модулів

Означення модуля

Модулем додатного числа називається само це число,

модулем від'ємного числа називається число йому протилежне,

модуль нуля дорівнює нулю.

$$|x| = \begin{cases} x, \textit{ якщо } x \geq 0, \\ -x, \textit{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

Приклади: $|15| = 15$; $|-3| = 3$; $|0| = 0$; $|a|^4 = a^4$.

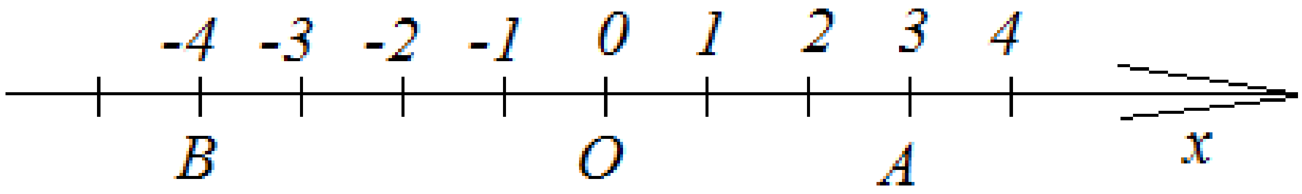
Означення модуля

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ якщо } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{ якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Приклад: $|x-4| = \begin{cases} x-4, \text{ якщо } x \geq 4, \\ -(x-4), \text{ якщо } x < 4 \end{cases}$

Геометричний зміст модуля:

Модуль – це відстань на координатній прямій від початку координат до точки, яка зображає дане число



$$|a| = OA; \ \ |b| = OB; |a - b| = AB$$

Основні властивості модулів

1. Модуль будь-якого числа – число невід’ємне $|a| \geq 0$.

2. Модулі протилежних чисел рівні $|-a| = |a|$.

3. Величина числа не перевищує величини його модуля $a \leq |a|$.

4. Модуль добутку дорівнює добутку його множників $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

5. Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\ (b \neq 0)$.

6. Квадрат модуля дорівнює квадрату числа $|a|^2 = a^2$.

Побудова графіків з модулем

- Метод інтервалів

- Метод елементарних перетворень

Побудова графіків методом інтервалів

Якщо аналітичний запис функції містить один модуль або суму декількох модулів, побудову графіка краще виконувати методом інтервалів.

Сутність даного методу полягає у необхідності розкриття знаків модуля за означенням.

Загальна схема основного методу побудови графіків з модулями:

1. Знаходимо область визначення функції.

2. Знаходимо корені всіх функцій, що містяться під знаком модуля (підмодульні корені).

3. Позначаємо знайдені корені на області визначення та розбиваємо її на інтервали знакосталості підмодульних функцій.

4. Розкриваємо модулі та знаходимо аналітичний запис функції у кожному інтервалі.

5. З кожного інтервалу вибираємо контрольні точки та будуємо графік функції у відповідній частині координатної площини. Остаточний графік об’єднує лінії, які одержали на кожному інтервалі.

Побудувати графік функції:

y =|3x+4|-2

Побудова: 3x+4=0

x = $-1\frac{1}{3}$

Координатна площина поділяється прямою x = $-1\frac{1}{3}$ **на дві півплощини:**

1) x< $-1\frac{1}{3}$

y =-(3x+4)-2

y =-3x-6

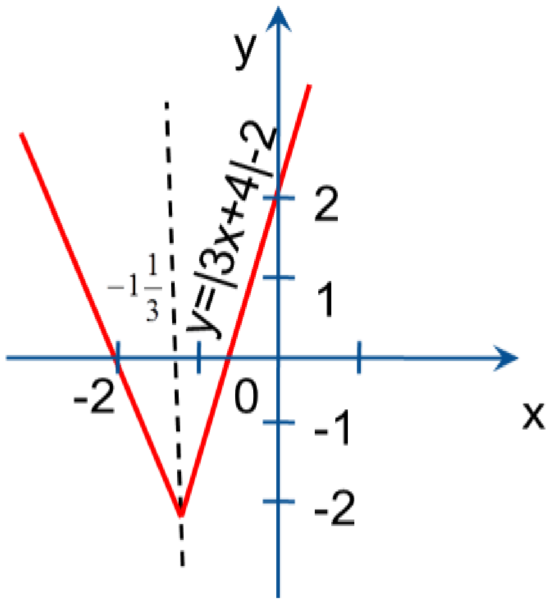
x	y
-2	0
-3	3

2) x≥ $-1\frac{1}{3}$

y=3x+4-2

y=3x+2

x	y
-1	-1
0	2



Побудувати графік функції:

y=|x-1| -|2 - x| + 2

Побудова: x=1 x=2

1) **x<1**

y=-x+1-2+x+2

y=1

2) **-1 ≤ x≤ 2**

y=x-1-2+x+2

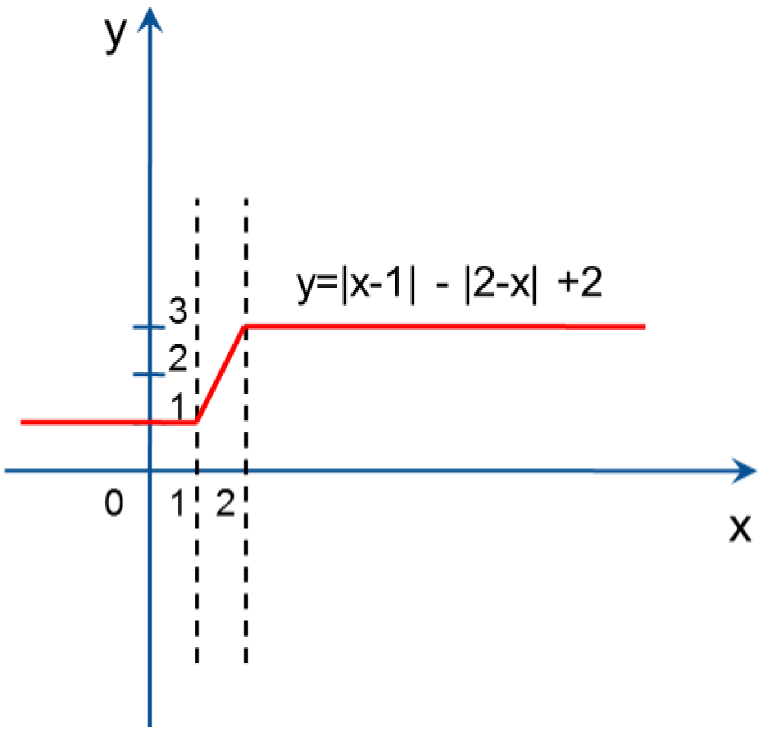
y=2x-1

x	y
1	1
2	3

3) **x>2**

y =x-1+2-x+2

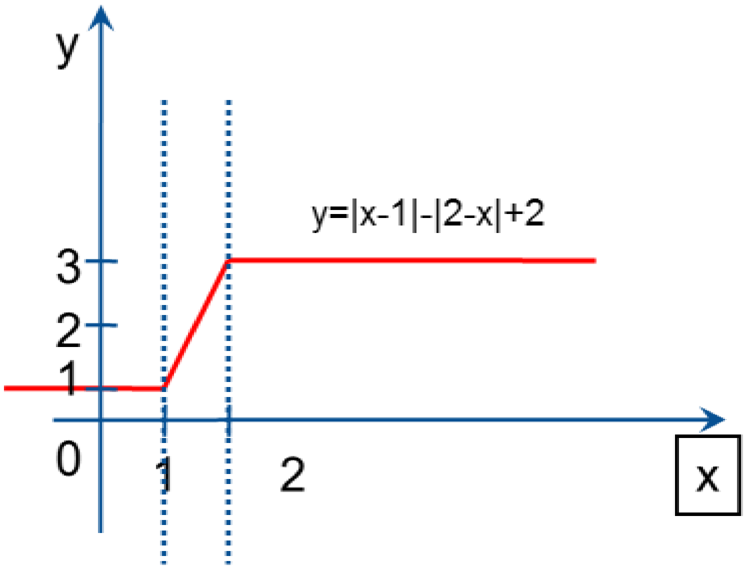
y=3



Практичні завдання

- $y=|x-1|+|x-2|+x$
- $y=|3x|-3x$
- $y=|x-3|+|1-x|+4$
- $y=|5-x|-|2-x|-3$
- $y=7-|x-1|+|x+5|$
- $y=|x-5|+|5-x|$
- $y=-|3-x|+|2-x|-3$
- $y=|\frac{1}{3}x-2|+|3+\frac{2}{3}x|-3$

а) y=|x - 1|+|2 - x| +2



- Побудова:

x=1; x=2

1) x< 1

   y=-x+1-2+x+2

   y=1

2) 1≤x≤ 2

   y=x-1-2+x+2

   y=2x -1

3) x>2

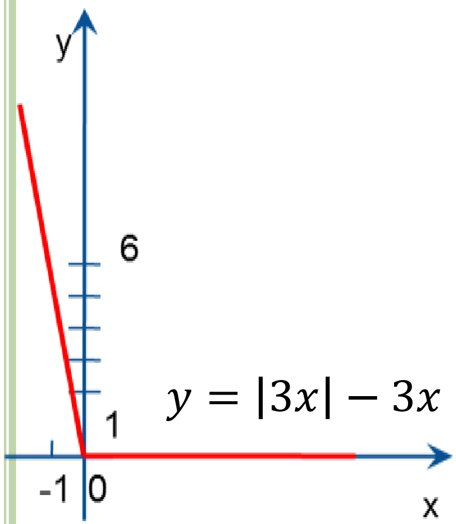
   y=x-1+2-x+2

   y=3

b) y=|3x|-3x;   c) y=|x-3|+|1-x|+4;

Побудова:

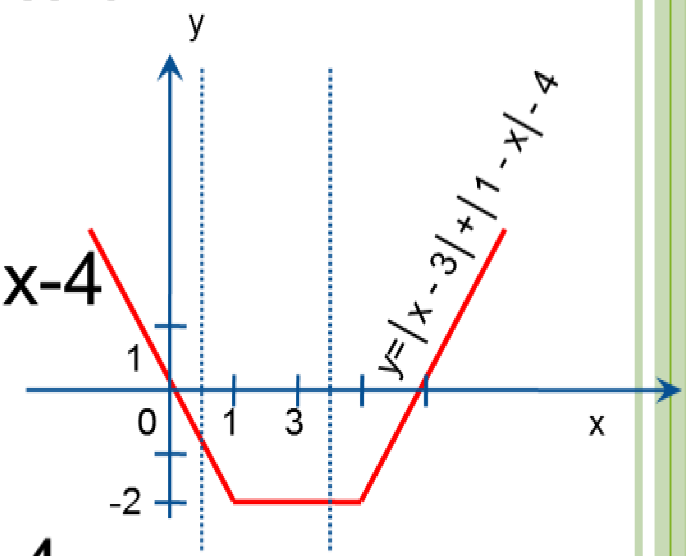
$$y=\begin{cases} 0, & x\geq 0 \\ -6x, & x<0 \end{cases}$$



- Побудова:

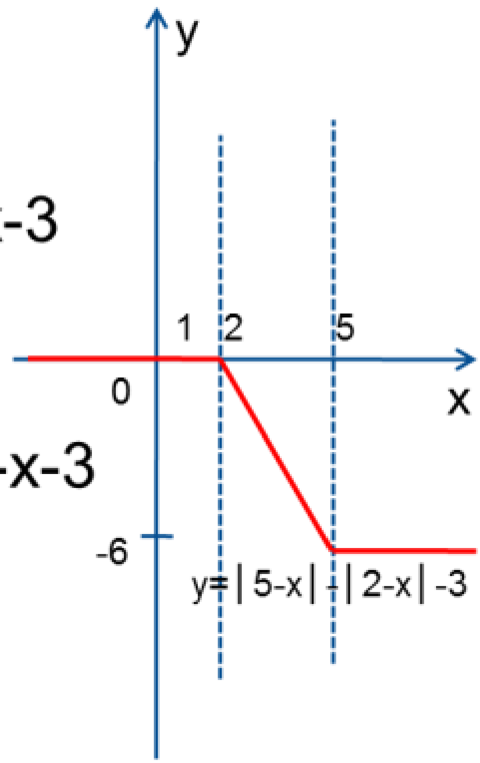
x=1, x=3

1) x≤1
   y= -x+3+1-x-4
   y=-2x
2) 1≤x≤3
   y=-x+3-1+x-4
   y=-2
3) x≥3
   y=x-3-1+x-4
   y=2x-8



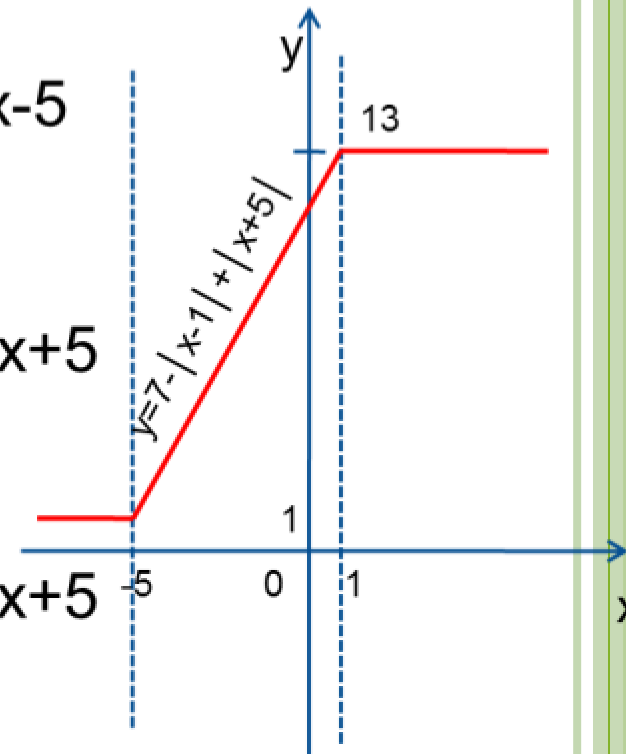
d) $y=|5-x|-|2-x|-3$; e) $y=7-|x-1|+|x+5|$;

1) $x \le 2$
$y=5-x-2+x-5$
$y=0$
2) $2 \le x \le 5$
$y=5-x+2-x-3$
$y=-2x+4$
3) $x \ge 5$
$y=-5+x+2-x-3$
$y=-6$



- Побудова:

1) $x \le -5$
$y=7+x-1-x-5$
$y=1$
2) $-5 \le x \le 1$
$y=7+x-1+x+5$
$y=2x+11$
3) $x \ge 1$
$y=7-x+1+x+5$
$y=13$



f) $y=|x-5|-|5-x|$; k) $y=-|3-x|+|2-x|-3$

- Побудова:

$x=5$

1) $x \le 5$

$y=-x+5+5-x$

$y=-2x+10$

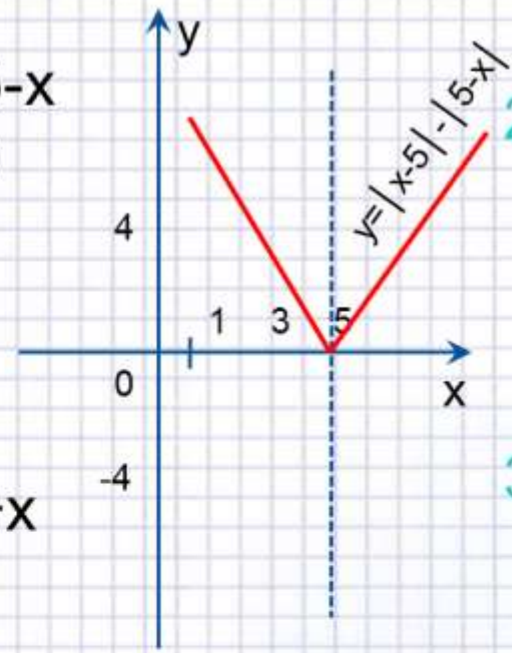
x	y
5	0
3	4

2) $x \ge 5$

$y=x-5-5+x$

$y=2x-10$

x	y
5	0
3	-4



- Побудова:

1) $x \le 2$

$y=-4$

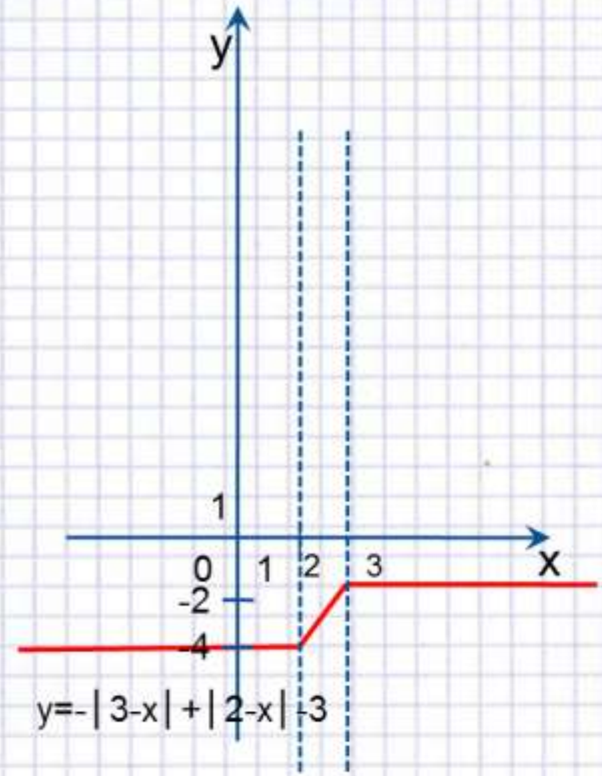
2) $2 \le x \le 3$

$y=2x-8$

x	y
2	-4
5	2

3) $x \ge 3$

$y=-2$



l) $y=\left|\frac{1}{3}x-2\right|+\left|3+\frac{2}{3}x\right|-3$

- Побудова:

$x=6;\ x=-4,5$

1) $x\le -4,5$

$y=-\frac{1}{3}x+2-3-\frac{2}{3}x-3$

$y=-x-4$

x	y
-4,5	0,5
-5	1

2) $-4,5\le x\le 6$

$y=-\frac{1}{3}x+2+3+\frac{2}{3}x-3$

$y=\frac{1}{3}x+2$

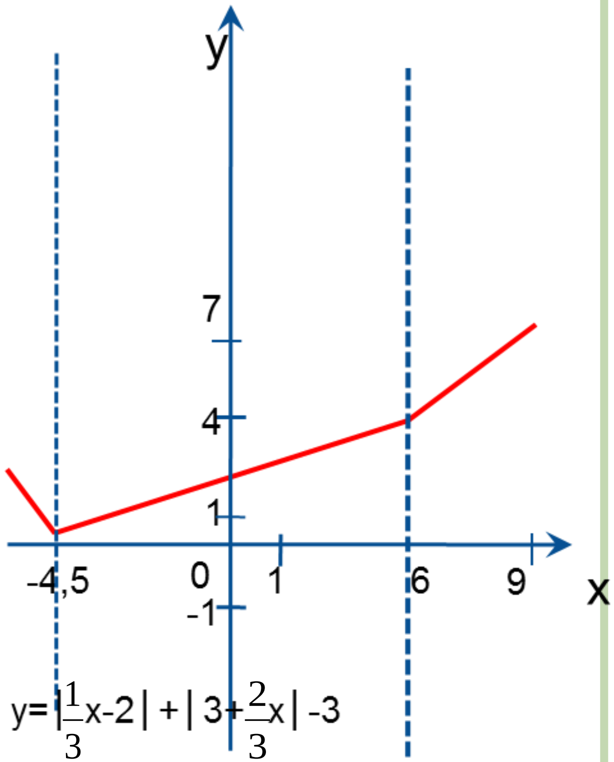
x	y
3	3
6	4

3) $x\ge 6$

$y=\frac{1}{3}x-2+3+\frac{2}{3}x-3$

$y=x-2$

x	y
6	4
9	7



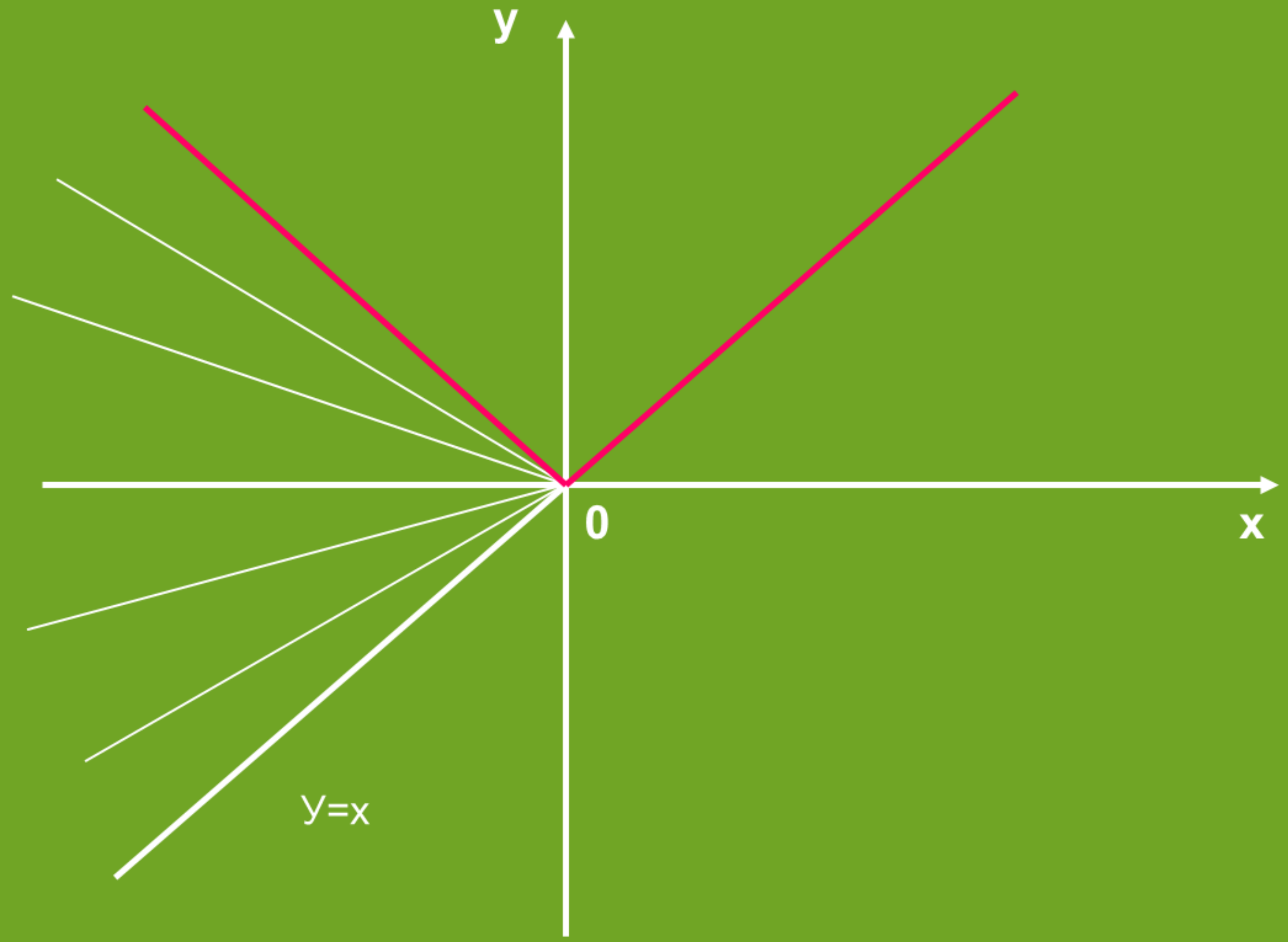
Побудова графіків методом елементарних перетворень

Функція $y = |x|$

- *Графік функції $y = |x|$ одержуємо з графіка*

  $y = x$ за допомогою наступних перетворень: частина графіка $y = x$, яка лежить над віссю Ох, зберігається, частина його, яка лежить нижче осі Ох, відображається симетрично відносно осі Ох.

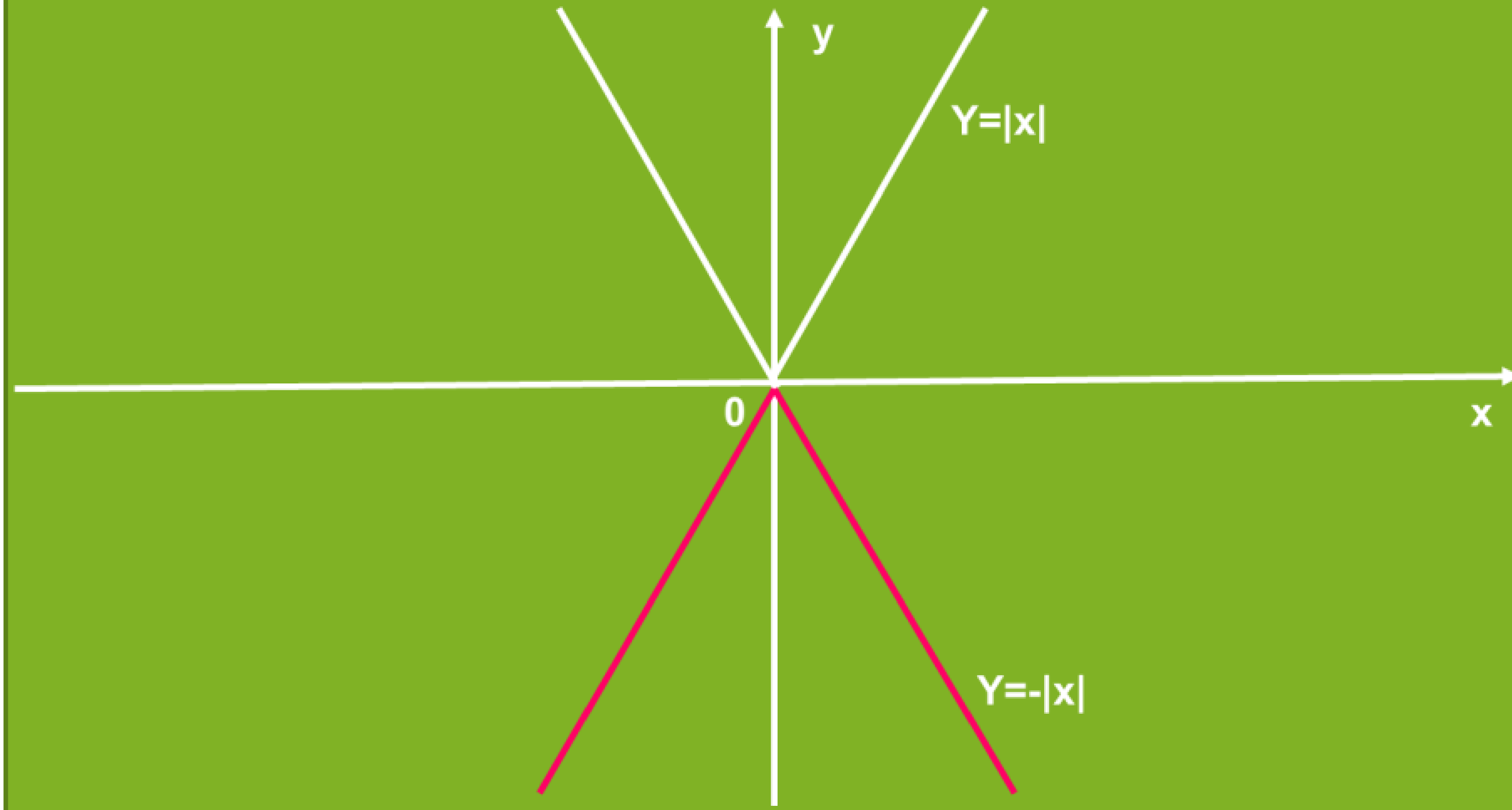
Функція y=|x|



Функція $y=-|x|$

- Графік функції
  $y=-|x|$ одержуємо симетричним відображенням графіка $y=|x|$ відносно осі Ox.

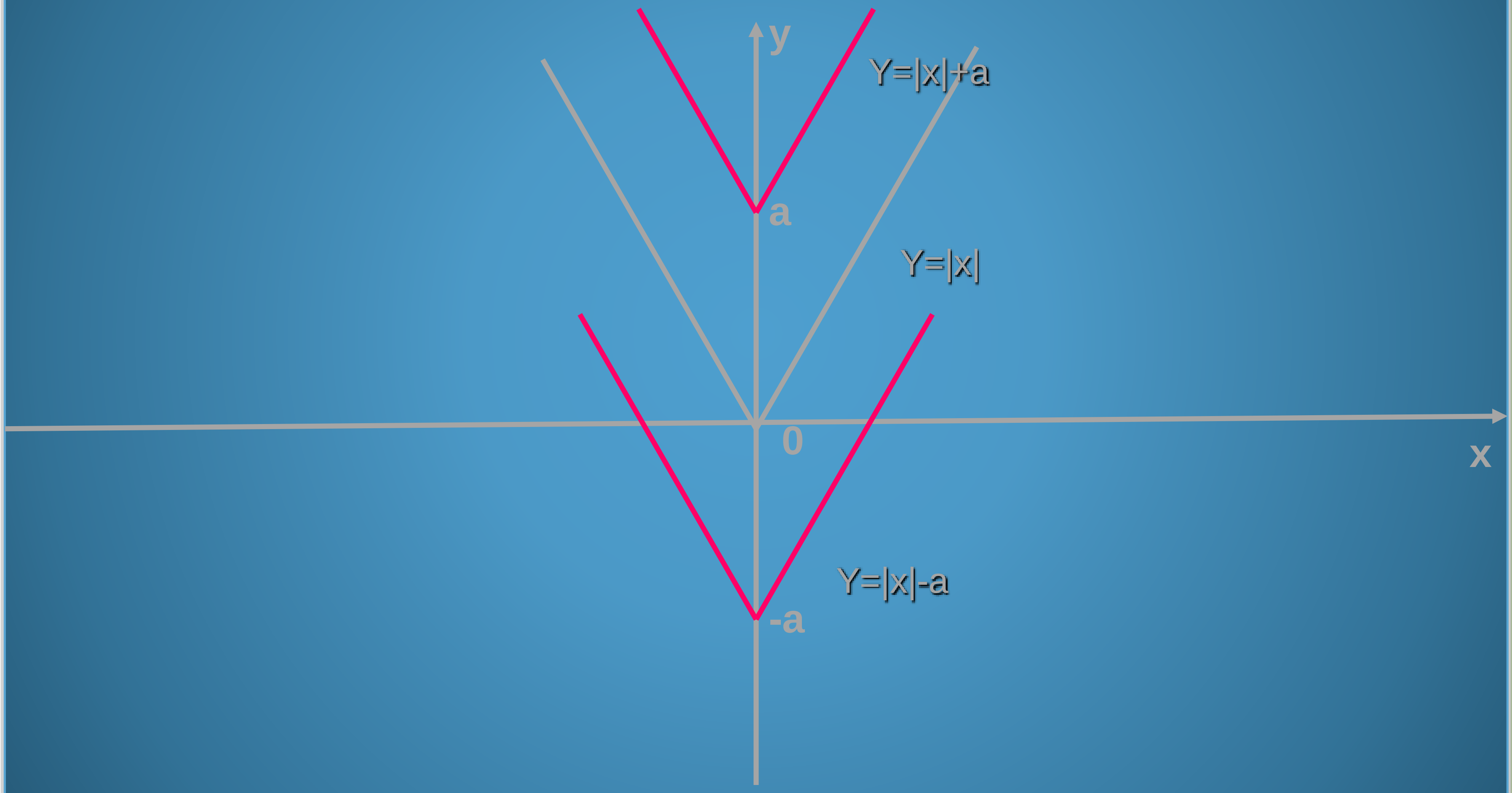
Функція y=-|x|



Функція $y=|x|+a$

- *Графік функції $y=|x|+a$ одержуємо параллельним переносом графіка $y=|x|$ в додатньому напрямі осі Oy на a одиничних відрізків при $a>0$ і у від'ємному напрямі на $|a|$ одиничних відрізків при $a<0$.*

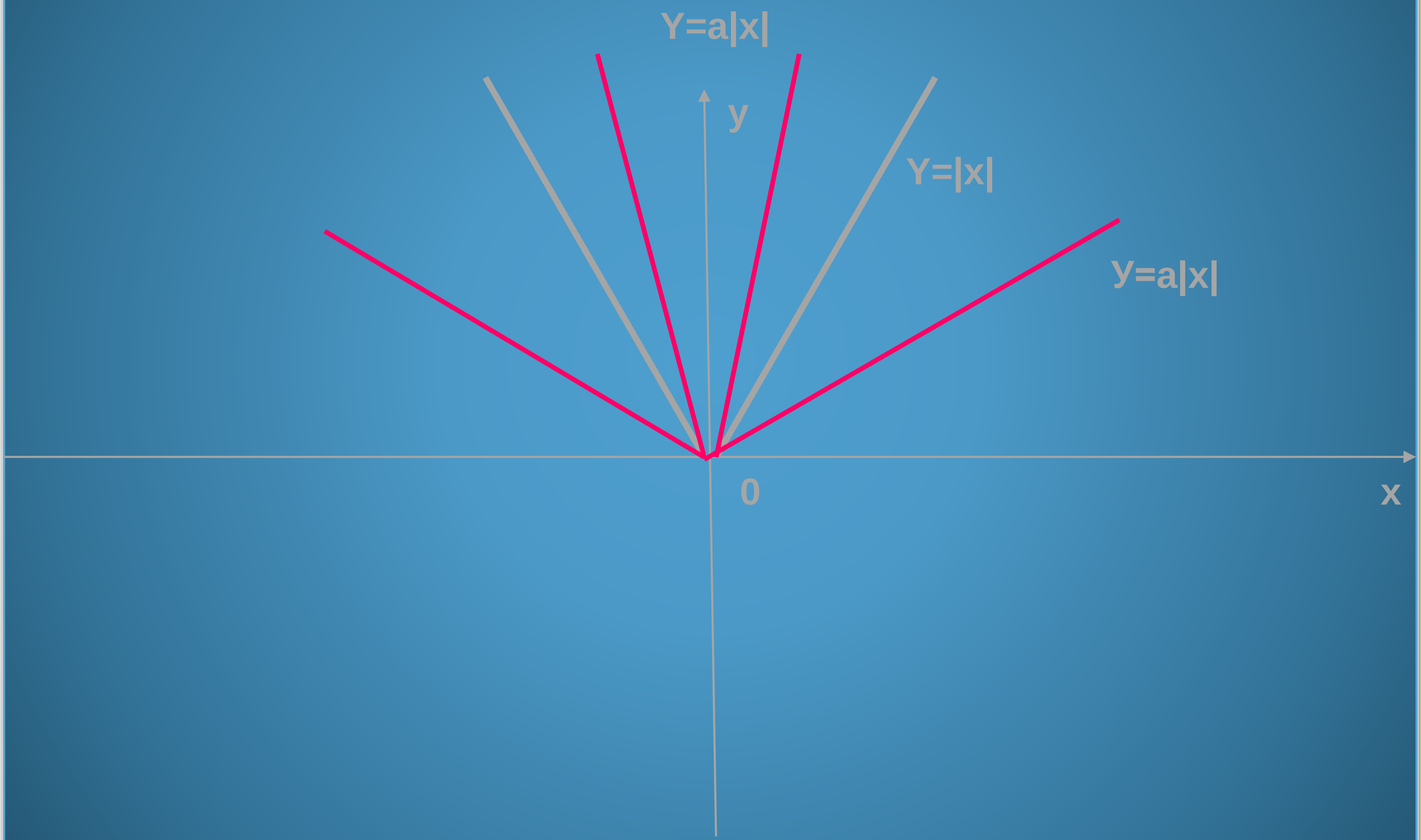
Функція y=|x|+a



Функція $y=a|x|$

- Графік функції $y=a|x|$ одержуємо розтягуванням графіка $y=|x|$ вздовж осі Оу в а разів при $a>1$ і зтисканням вздовж цієї осі в $1\backslash a$ разів при $0<a<1$.

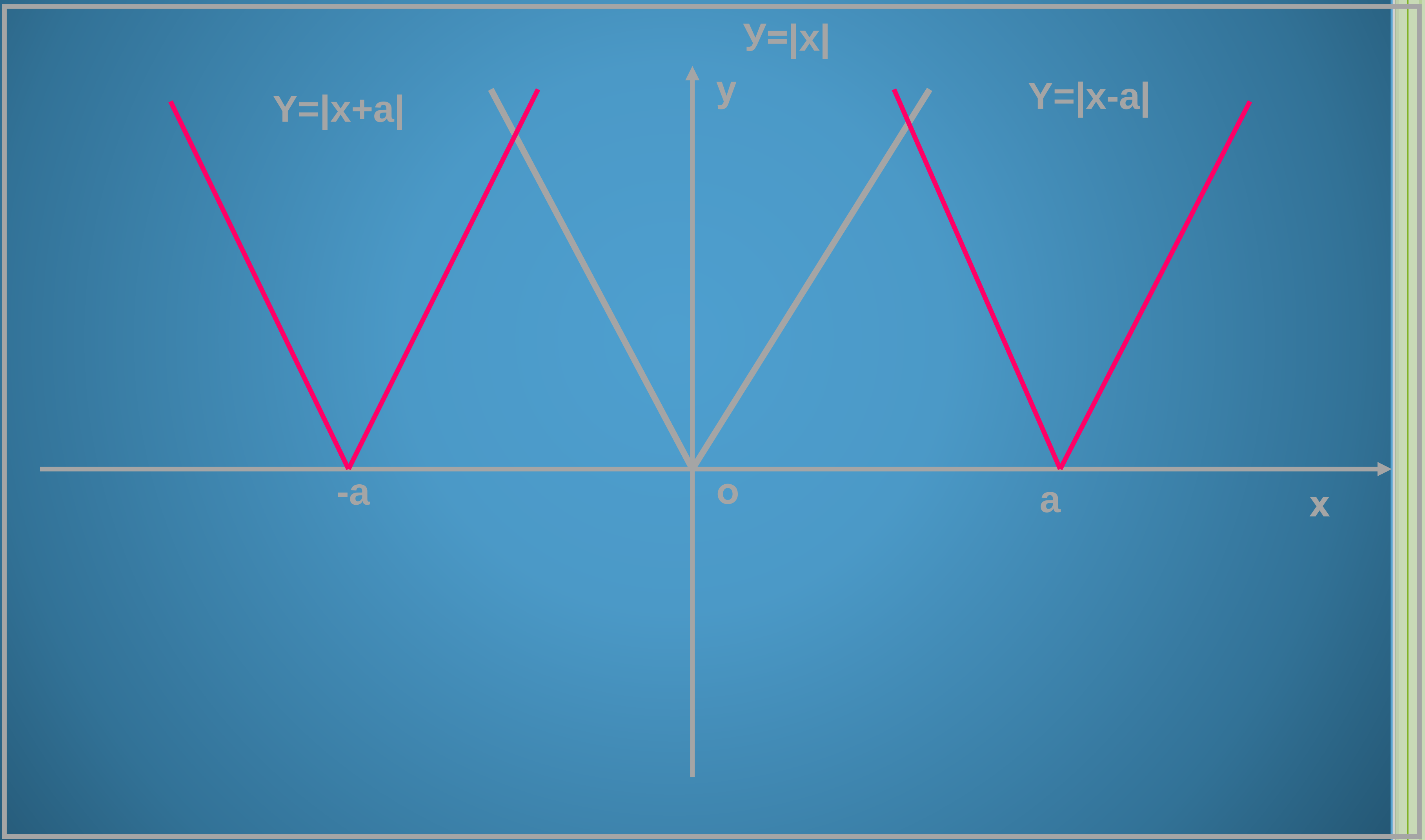
Функція y=a|x|



Функція y=|x-a|

- Графік функції y=|x-a| одержуємо паралельним перенесенням графіка y=|x| вздовж осі Ох на а одиничних відрізків .

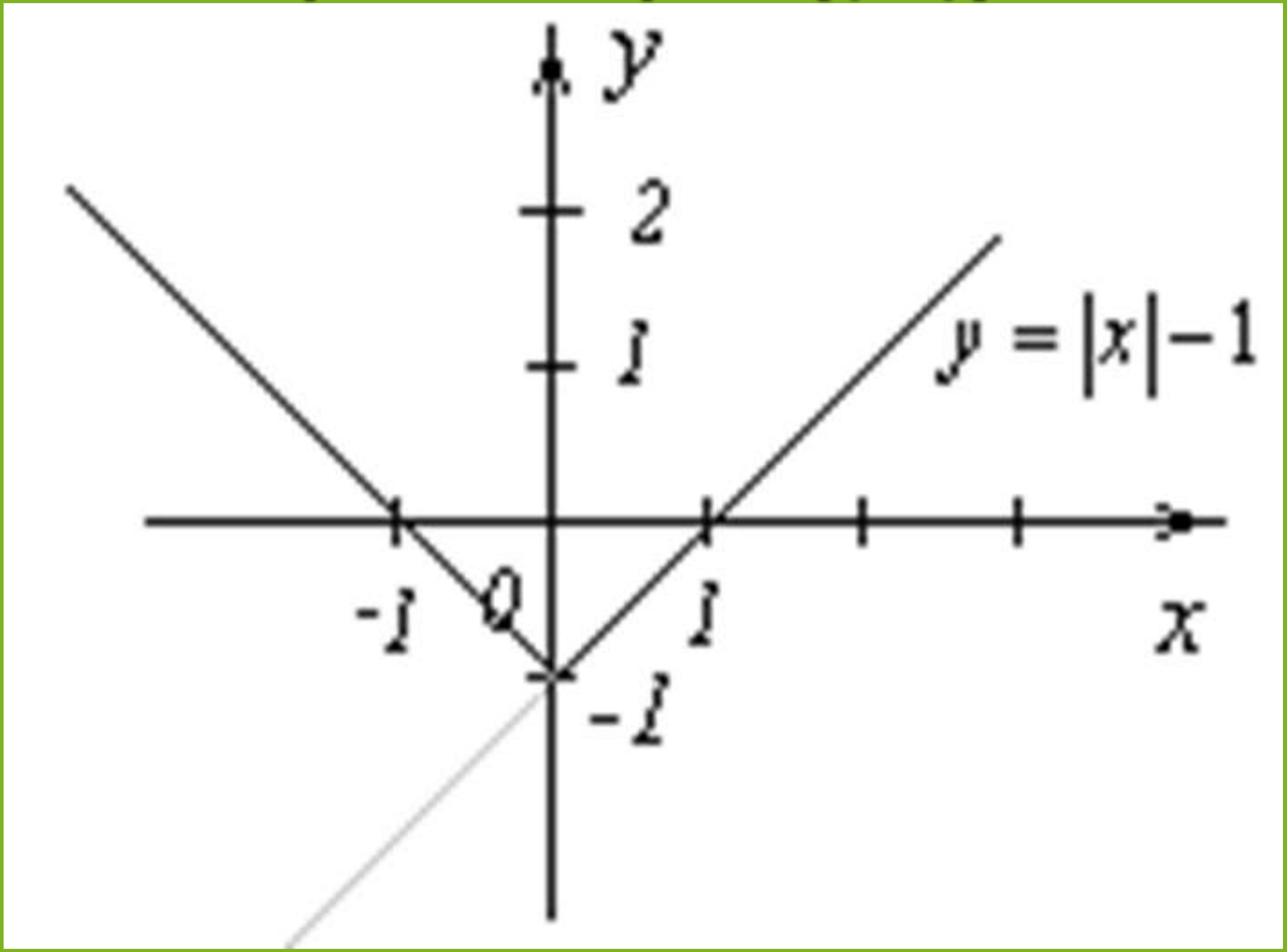
Функція y=|x-a|



Функція y=f(|x|)

- Графік функції y=f(|x|) одержуємо з графіка y=f(x) за допомогою наступних кроків: справа від осі Oy (і на самій осі Oy) без змін і ця ж сама частина графіка – симетрія відносно осі Oy.

Функція y=f(|x|)



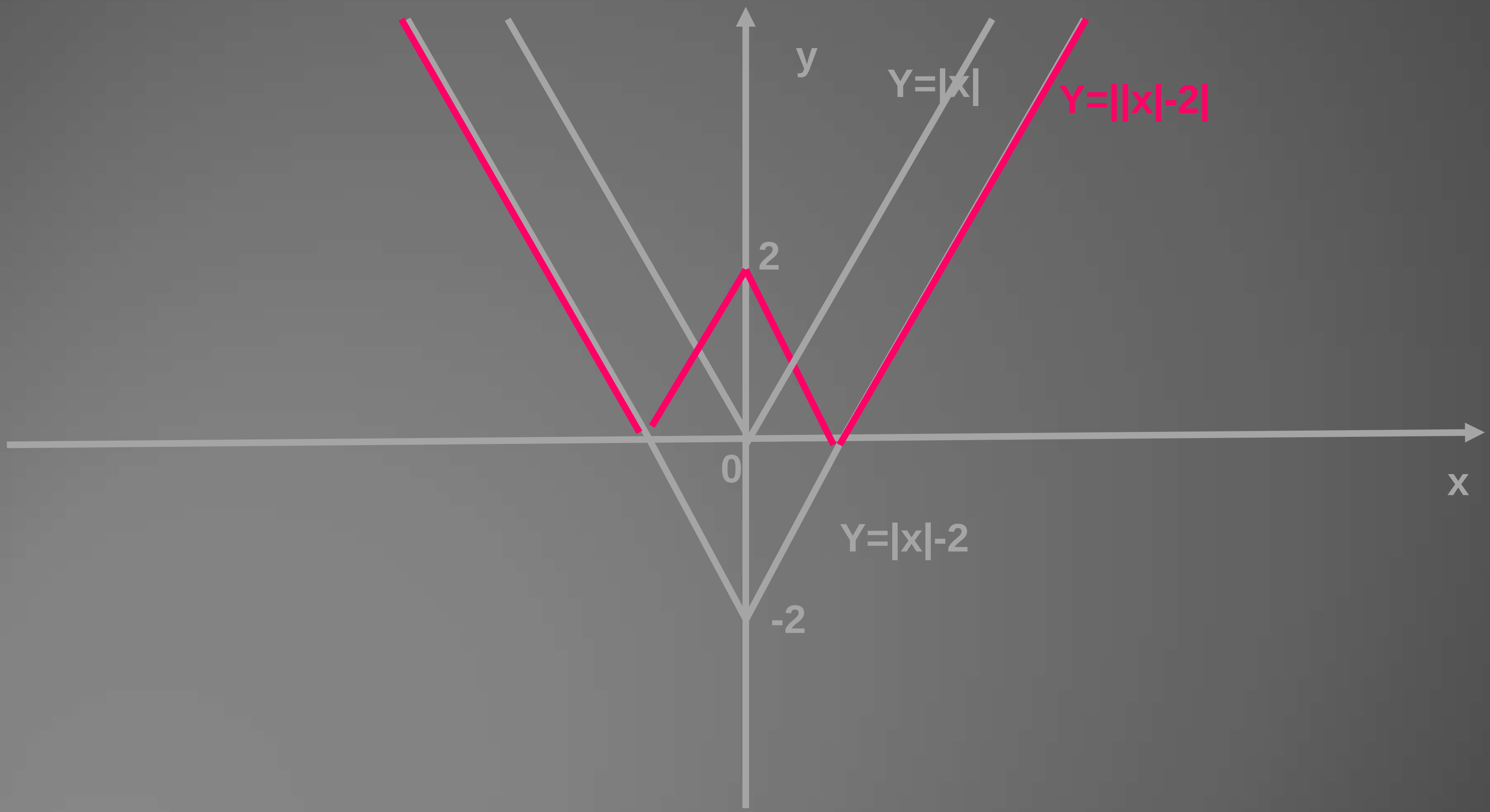
Від теорії до практики

Розглянемо побудову складніших графіків.

- Побудувати графік функції **$y=||x|+2|$**.
- Побудова:

1) Будуємо графік функції $y=|x|$,
2) Переміщуємо його по осі Оу вниз на 2 одиничних відрізки,
3) Відображаємо частину графіка, яка разташована під віссью Ох, симетрично цій осі, у верхню півплощину.

Функція y=||x|-2|



Функція $y=||x-1|-2|$

- Побудова:

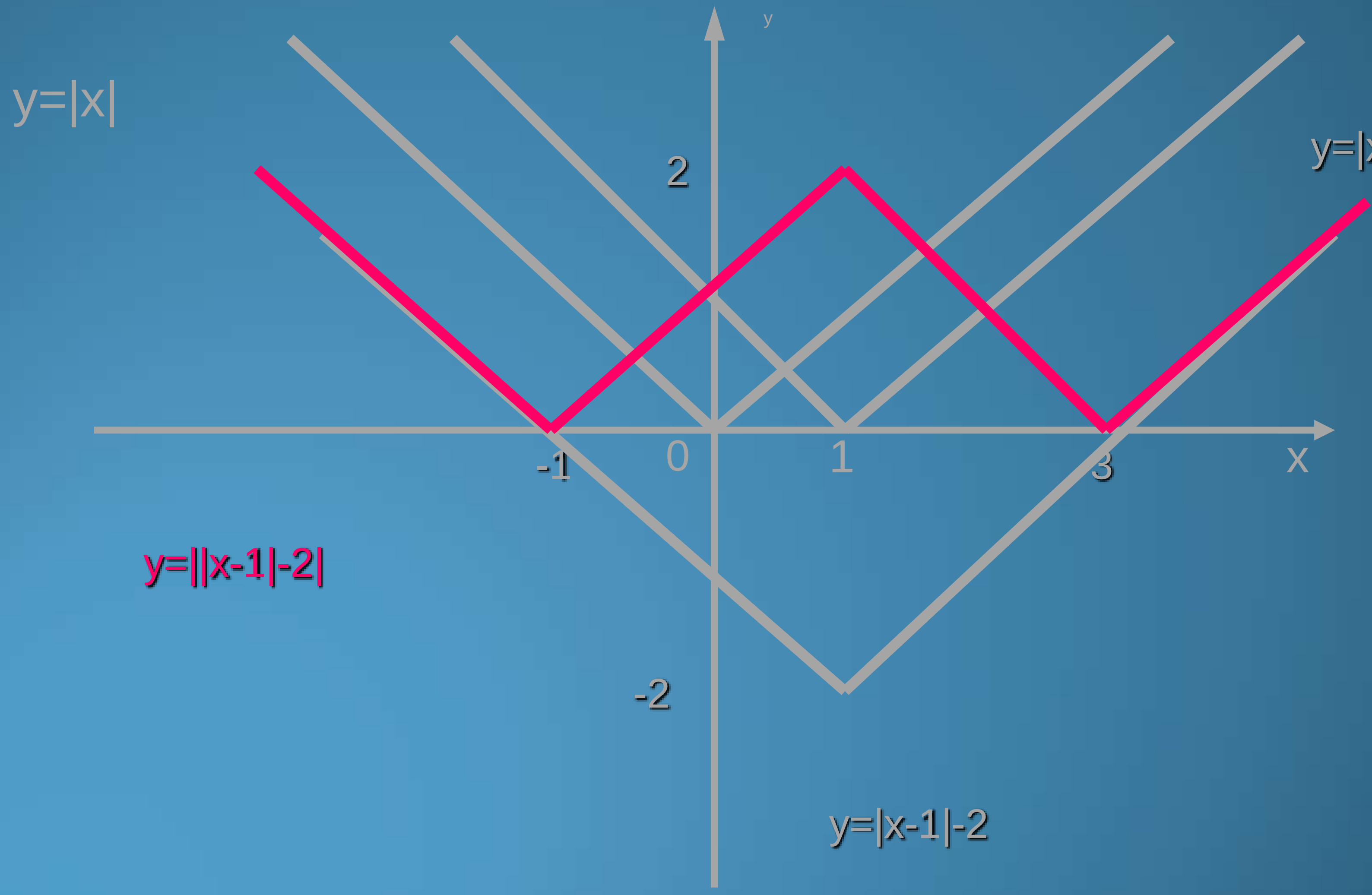
1)Будуємо графік функції $y=|x|$.

2)Будуємо графік функції $y=|x-1|$.

3)Будуємо графік функції $y=|x-1|-2$.

4)Застосовуємо до графіка $y=|x-1|-2$ операцію "модуль функції".

Функція y=||x-1|-2|



Рівняння з модулем

- Метод інтервалів
- Застосування геометричного змісту модуля

Метод інтервалів для рівнянь з модулем

Загальна схема основного методу розв’язування рівнянь з модулями:

1. Знаходимо область визначення.
2. Знаходимо корені всіх функцій, що містяться під знаком модуля(під модульні корені).
3. Позначаємо знайдені корені на області визначення та розбиваємо її на інтервали.
4. Знаходимо розв’язок у кожному інтервалі і обов’язково перевіряємо, чи входить знайдений розв’язок до інтервалу.

У відповідь об’єднуємо всі розв’язки, які дістали на кожному інтервалі

Приклад . Знайти розв'язок рівняння $|5x - 10| = 11.$
Розв'язання: Задане завдання є найпростішим типом рівнянь з модулями. В першу чергу рівняння містить модуль один раз та змінна входить лінійно.

Знаходимо точку, в якій вираз під знаком модуля перетворюється в нуль

$5x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2.$

Справа від цієї точки вираз під модулем приймає додатне значення, зліва – від'ємне.

Розкриваючи модуль, отримаємо два рівняння з умовами на невідому

$5x - 10 = 11; \quad x > 2;$

$-5x + 10 = 11; \quad x < 2.$

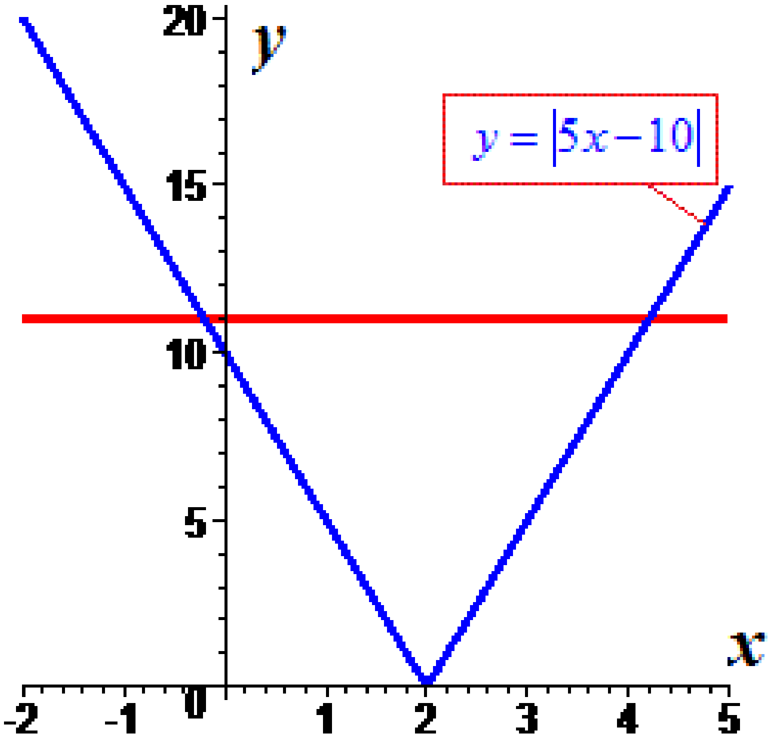
Знаходимо розв'язки

$$5x = 11 + 10 \Rightarrow x = \frac{21}{5} = 4,2;$$

$$-5x = 11 - 10 \Rightarrow x = -\frac{1}{5} = -0,2.$$

Відповідь: -*0,2 і 4,2.*

Такого типу рівняння з модулем можна розв'язати графічним методом. В результаті отримаємо наступний вигляд функцій



Приклад Розв'язати рівняння

$$|x| - 2|x+1| = 5.$$

Розв'язання: Дане рівняння визначене для будь-якого x. Підмодульні корені $x = 0$ *і* $x = -1$. Розіб'ємо числову пряму точками 0 *і* -1 на три інтервали, на кожному з яких можемо записати рівняння без знаків модуля.

1) $\begin{cases} x < -1, \\ -x + 2x + 2 = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x < -1, \\ x = 3 \end{cases}$

На даному проміжку рівняння розв'язків не має.

2) $\begin{cases} -1 \le x < 0, \\ -x - 2x - 2 = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le x < 0, \\ x = -\dfrac{7}{3}, \end{cases}$ - коренів немає.

3) $\begin{cases} x \ge 0, \\ x - 2x - 2 = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 0, \\ x = -7 \end{cases}$ - коренів немає.

Відповідь: розв'язків немає.

Приклад. Знайти корені рівняння

$$|1-5x| = |2-x|.$$

Розв'язання: Розв'язуємо за схемою попереднього прикладу.
Знаходимо точки в яких модулі перетворюються в нуль.

$1-5x=0 \Rightarrow x=0,2;$

$2-x=0 \Rightarrow x=2.$

Обидві точки розділяють дійсну вісь на інтервали.

$(-\infty;0,2);(0,2;2);(2;\infty).$

Позначаємо знаки підмодульних функцій на знайдених інтервалах. Знаки встановлюємо простою підстановкою точок з інтервалу

$x\in(-\infty;0,2)\Rightarrow[+,+];$

$x\in(0,2;2)\Rightarrow[-,+];$

$x\in(2;\infty)\Rightarrow[-,-].$

Для зручності можете позначати інтервали графічно, декому це дуже допомагає, однак можна обійтися лише наведеними вище записами.
Розкриваємо модулі, враховуючи знаки та знаходимо розв'язки.

$1-5x=2-x\Rightarrow 4x=-1\Rightarrow x=-0,25;$

$1-5x=-2+x\Rightarrow 6x=3\Rightarrow x=0,5;$

$-1+5x=-2+x\Rightarrow 4x=-1\Rightarrow x=-0,25.$

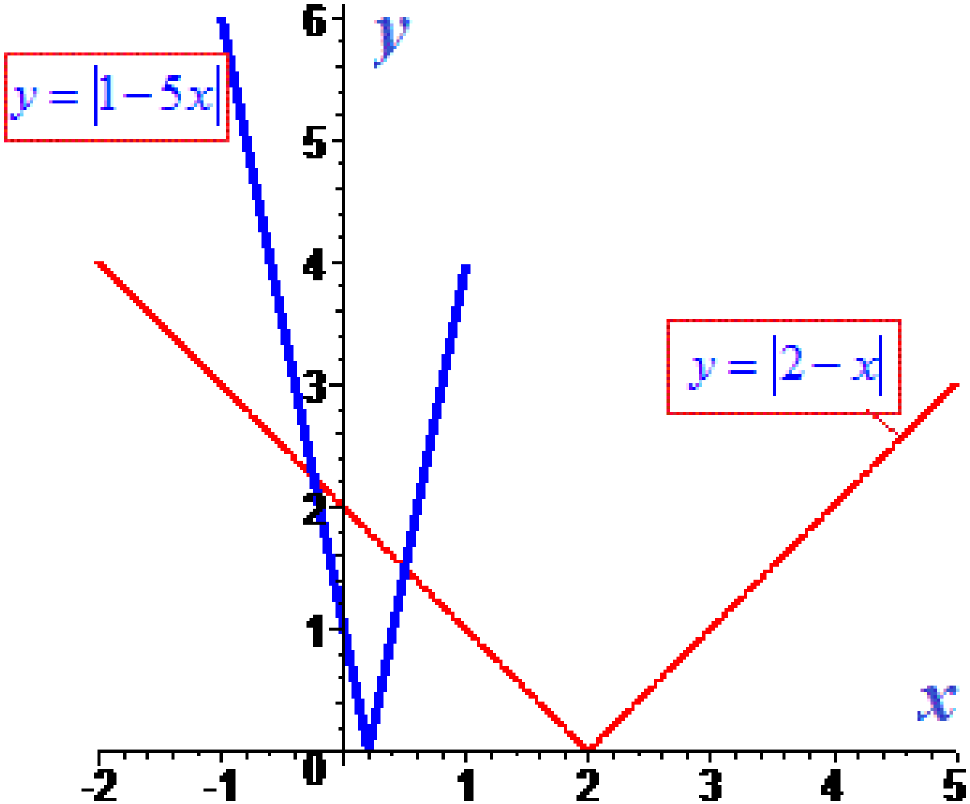
Останній розв'язок не має змісту, оскільки не належить проміжку на якому його знаходимо. Таким чином рівняння задовільняють значення

$x=-0,25;\ x=0,5.$

Відповідь: *-0,25 і 0,5.*

Графік модуль-функцій наведено нижче,

точки їх перетину і є розв'язком.



Приклад . Розв'язати рівняння

$$\frac{|x-1|+|x-3|-2}{\sqrt{2-x}}=0.$$

Розв'язання: Дане рівняння має область визначення $2-x>0$, тобто $x<2$.

Під модульні корені $x=1$ *і* $x=3$, причому $3\notin(-\infty;\ 2)$. Розіб'ємо область визначення точкою $x=1$ на два проміжки, на кожному з яких можемо записати рівняння без знаків модуля.

1) $\begin{cases} x<1, \\ -x+1-x+3-2=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1, \\ x=1. \end{cases}$

На даному проміжку рівняння коренів немає.

2) $\begin{cases} 1\le x<2, \\ x-1-x+3-2=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 1\le x<2, \\ x\in R. \end{cases}$

Кожна точка даного проміжку буде розв'язком рівняння, тобто $x\in[1,\ 2)$.

Відповідь: $x\in[1,\ 2)$.

Приклад: Знайти розв'язок рівняння

$|x+3| - |x-5| = 3x+4.$

Розв'язання: Знаходимо точки, які розбивають вісь на області знакосталості

$x+3=0 \Rightarrow x=-3;$

$x-5=0 \Rightarrow x=5.$

Визначаємо знаки підмодульних функцій на цих областях

$x \in (-\infty;-3) \Rightarrow [-,-];$

$x \in (-3;5) \Rightarrow [+,-];$

$x \in (5;\infty) \Rightarrow [+,+].$

Розкриваємо модулі та обчислюємо

$-(x+3)+(x-5)=3x+4; 3x=-12; x=-4$

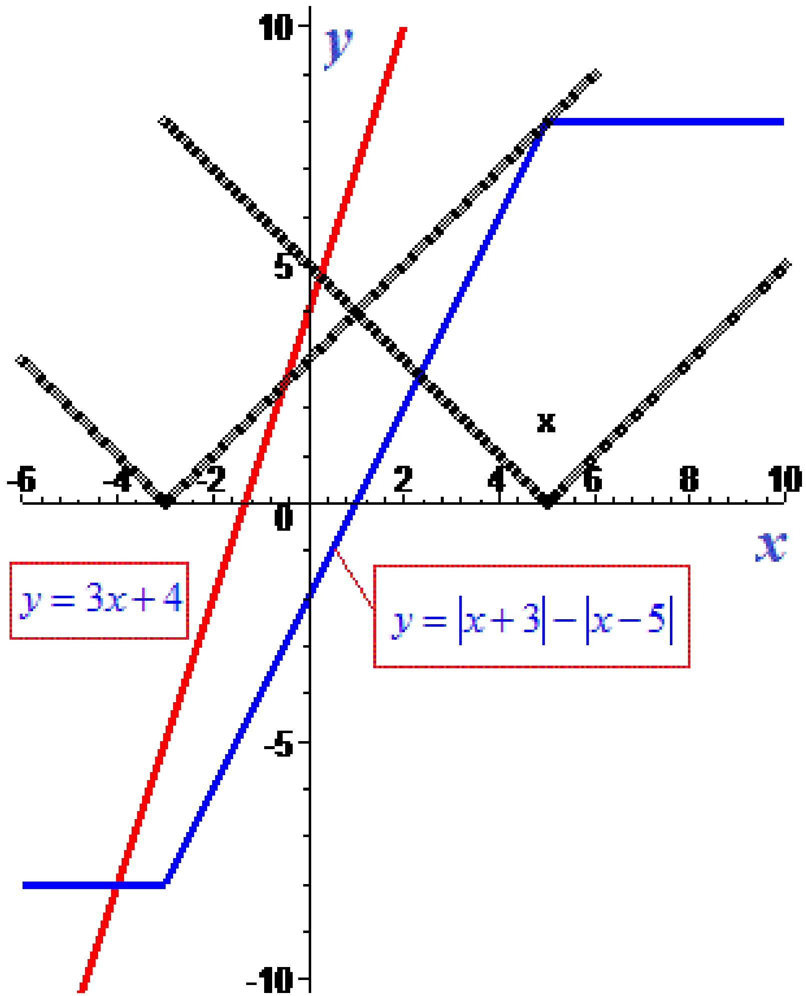
$x+3+(x-5)=3x+4 \Rightarrow x=-6;$

$x+3-(x-5)=3x+4 \Rightarrow 3x=4; x=4/3.$

Другий і третій розв'язки не належать проміжку, отже рівнянню відповідає лише $x=-4$.

Відповідь: -4.

Графіки модулів зображено графічно



Використання геометричного змісту модуля для розв’язування рівнянь з модулями

Рівняння виду $|f(x)| = b$.

При $b < 0$ *розв’язків немає;*

при $b = 0$ *рівносильне рівнянню* $f(x) = 0$;

при $b > 0$ *рівносильне сукупності систем* $\left[\begin{array}{l} f(x) = b, \\ f(x) = -b. \end{array}\right.$

Приклад. Розв’язати рівняння $|5x+4|=3.$

Розв’язання: Дане рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} 5x+4=3, \\ 5x+4=-3; \end{array}\right.$$ звідки знаходимо $$\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{5}, \\ x=-\dfrac{7}{5}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $-\dfrac{7}{5}; -\dfrac{1}{5}.$

Знайти корені рівняння

$$\left|x^2-6|x|+4\right|=1.$$

Розв'язання: Маємо квадратне рівняння під модулем, крім того змінна у ньому також міститься під модулем. Такого роду завдання викликають чимало труднощів при розв'язуванні у початківців, однак для "профі" такі приклади не складні. В першу чергу позбуваємося модуля біля змінної.

$$\left|x^2-6x+4\right|=1;\ x>0;$$

$$\left|x^2+6x+4\right|=1;\ x<0.$$

Такого роду приклади приводять до великої кількості областей, тому можна розв'язувати застосовуючи розбиття на проміжки, а можна розв'язувати самі рівняння, а після того перевіряти підстановкою.

Обидва рівняння при розкритті модулів дають наступні

$$x^2-6x+4=1;$$

$$-\left(x^2-6x+4\right)=1;$$

$$x^2+6x+4=1;$$

$$-\left(x^2+6x+4\right)=1.$$

Знаходимо корені першого рівняння

$$x^2 - 6x + 3 = 0;\ x \in [0; 5,23)$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3) = 24;$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{2} \Rightarrow$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{6} \approx 5,44;\ x_2 = 3 - \sqrt{6} \approx 0,55$$

Розв'язуємо друге квадратне рівняння

$$x^2 - 6x + 5 = 0;\ x \in (5,23; \infty)$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5) = 16;$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 5;\ x_2 = 1.$$

З третього рівняння через дискримінант

$$x^2 + 6x + 3 = 0;\ x \in (-\infty; -5,23) \cup (-0,76; 0]$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3) = 24;$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{2} \Rightarrow$$

$$x_1 = -3 + \sqrt{6} \approx -0,55;\ x_2 = -3 - \sqrt{6} \approx -5,45$$

отримуємо два розв'язки.

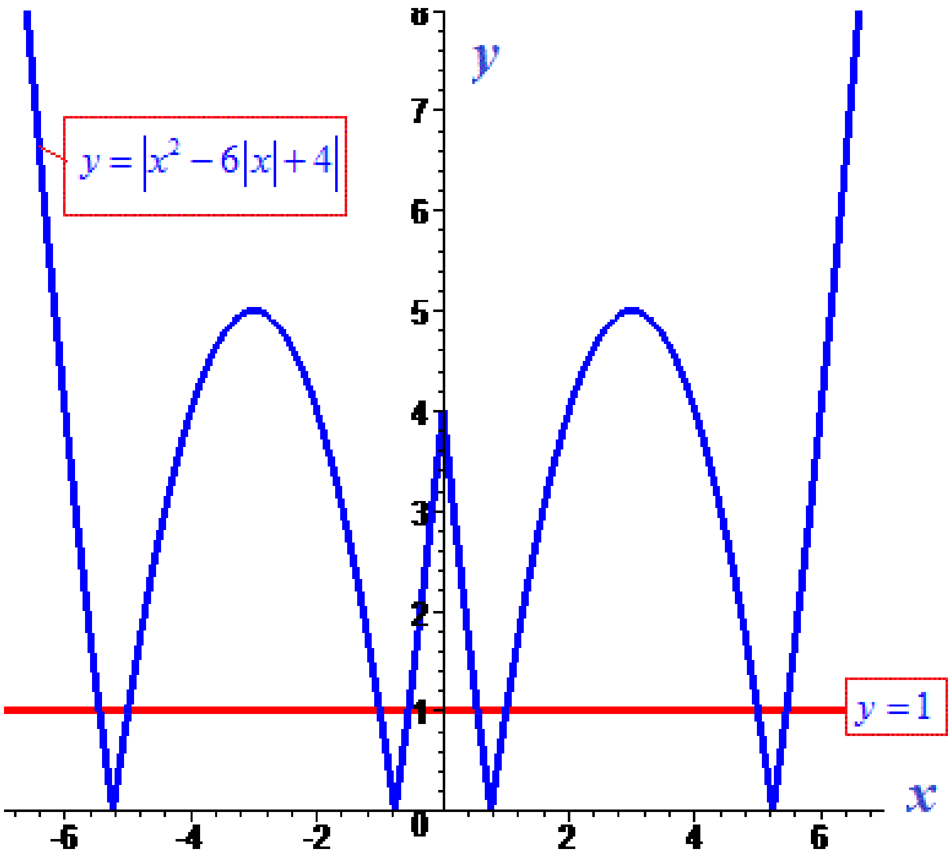
З останнього – четвертого рівняння

$$x^2+6x+5=0;\ x\in(-5,23;-0,76)$$

$$D=6^2-4\cdot1\cdot(5)=16;$$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm4}{2}\Rightarrow x_1=-1;\ x_2=-5.$$

отримуємо два корені. Загалом отримали 8 розв'язків рівняння з модулями. Перевірка підстановкою показує, що вони всі підходять. Також для підтвердження нижче наведено графік модуль функції



Підсумок заняття

Контрольні запитання:

1. Дайте означення модуля числа. Поясніть поняття геометричного змісту модуля.

2. Сформулюйте метод інтервалів для побудови графіків з модулем.

3. Які основні елементарні перетворення графіка функції ви маєте знати?

4. Як побудувати графік методом елементарних перетворень?

5. Якими методами розв'язуються рівняння з модулем?

6. Розв'язування рівнянь з модулем графічним методом.

Домашнє завдання:

Виконати домашнє завдання «Лінійна функція та лінійні рівняння з модулем»

Текст домашнього завдання можна знайти на сайті кафедри МАіМО http://maimo.elit.sumdu.edu.ua/ за посиланням «Інформація для студентів», викладач

Захарченко Н. М., розділ «Домашнє завдання»

Ваші відповіді домашньої роботи, пропозиції та запитання чекаю на електронну адресу znnmaimo@ukr.net

Дякуємо за увагу