



Заняття 1.

Основні задачі на відсотки.

Прості та складні відсотки.



Соту частину гривні називають копійкою, соту частину метра – сантиметром, соту частину гектара – аром або соткою.

Прийнято називати соту частину будь-якої величини, числа «процентом» або «відсотком».

- *Відсотком називають одну соту частину* . В записах слово «відсоток» після числа замінюють знаком %.
 - Відсотки дають можливість легко порівнювати між собою частини цілого, спрощують розрахунки і тому дуже поширені.
-

Історична довідка:

Слово «процент» походить від латинських слів pro centum, що буквально означає «зі ста».

Широко почали використовувати відсотки в Старовинному Римі, але ідея відсотків з'явилась набагато раніше – вавилонські купці уже могли знаходити відсотки (але вони рахували не «зі ста», а «з шістдесяти», так як у Вавилоні користувались шістдесятичною системою відліку, яка і зараз використовується при вимірюванні часу та кутів).

Проценти були відомі індусам ще в 5 столітті нашої ери, а в Європі вони з'явилися на 1000 років пізніше. Бельгійський вчений *Симон Стевін* у 1584 році вперше опублікував таблицю відсотків.



Знак % з'явився, як помилка друку. В 1685 році у Парижі було надруковано книгу з комерційної арифметики, де помилково замість сто набрали %.

Після цієї помилки багато математиків почали використовувати знак % для позначення відсотків, і поступово він став загальноприйнятим.

Інколи застосовують і більш малі частини цілого — тисячні, тобто десяті частини відсотка. Їх називають промілле (від латинського «із тисячі») і позначають ‰.

Запиши у відсотках та прочитай, що буде на обідньому столі у щуки?

С – 0,02
А – 0,09
О – 0,17
В – 0,39
У – 0,1
І – 0,6
Ф – 0,9
П – 0,07
Е – 1,37

Ї – 4,6
Т – 5
Л – 0,2
Ц – 0,7
К – 4,5
Ж – 29
Н – 0,013
Щ – 0,12
Ю – 0,457

И – 6,006
Р – 4,51

<u>7</u>	<u>10</u>	<u>2</u>	<u>500</u>	<u>17</u>	<u>500</u>	<u>20</u>	<u>600,6</u>	<u>39</u>	<u>60</u>
	<u>17</u>	<u>450</u>	<u>10</u>	<u>1,3</u>	<u>70</u>	<u>60</u>	<u>500</u>	<u>9</u>	
	<u>450</u>	<u>9</u>	<u>451</u>	<u>9</u>	<u>2</u>	<u>600,6</u>	<u>450</u>	<u>600,6</u>	

Вирази відсотки у вигляді десяткового дробу та прочитай англійське прислів'я

Ю – 1%=0,01

Ь – 21%

Ч – 5%

Ш – 37%

К – 20%

Ї – 12%

Б – 25%

В – 60%

С – 30%

Щ – 45%

Е – 40%

Т – 6%

И – 50%

Й – 9%

Є – 75%

М – 92%

П – 100%

Ц – 940%

Г – 3%

Р – 500%

Ф – 10%

Д – 200%

Н – 16%

Х – 150%

З – 15%

Б – 511%

О – 80%

У – 59%

Я – 56%

Х – 31%

Ж – 81%

Є – 26%

І – 99%

А – 44%

В – 60%

$\overline{2}$ $\overline{0,5}$ $\overline{0,92}$ $\overline{5}$ $\overline{0,99}$ $\overline{2}$ $\overline{0,16}$ $\overline{0,8}$ $\overline{0,12}$

$\overline{0,2}$ $\overline{5}$ $\overline{0,44}$ $\overline{0,12}$ $\overline{0,16}$ $\overline{0,5}$

$\overline{0,56}$ $\overline{0,3}$ $\overline{0,16}$ $\overline{0,99}$ $\overline{0,37}$ $\overline{0,5}$ $\overline{0,09}$

$\overline{0,6}$ $\overline{0,99}$ $\overline{2}$ $\overline{0,6}$ $\overline{0,8}$ $\overline{0,03}$ $\overline{0,16}$ $\overline{0,01}$

$\overline{0,05}$ $\overline{0,59}$ $\overline{0,81}$ $\overline{0,5}$ $\overline{0,16}$ $\overline{0,5}$



Три види основних задач на відсотки:

1. Знаходження відсотка від цілого.

2. Знаходження цілого за даним числом його відсотків.

3. Відсоткове відношення.

При розв'язуванні основних видів задач на відсотки застосовують три способи:

- *зведення до одиниці,*
- *зведення до відповідних задач на дроби,*
- *застосування пропорцій.*

Нам здається, що основним способом для розв'язування таких задач слід взяти спосіб зведення до одиниці.

Знаходження відсотка від цілого.

Приклад 1: Знайти 21% від 150.

Розв'язання.

Спосіб 1: $150 : 100 \cdot 21 = 1,5 \cdot 21 = 31,5$.

Спосіб 2: $150 \cdot 0,21 = 150 \cdot \frac{21}{100} = \frac{3 \cdot 21}{2} = 31,5$.

Спосіб 3: 150 складає 100%,
 X складає 21%

$$x = \frac{150 \cdot 21}{100} = 31,5.$$

Знаходження цілого за даним числом його відсотків.

Приклад 2: Знайти число, якщо 17% його становлять 68.
Розв'язання.

Спосіб 1: $68 : 17 \cdot 100 = 400$.

Спосіб 2: $68 : 0,17 = 68 : \frac{17}{100} = \frac{68 \cdot 100}{17} = 400$.

Спосіб 3: 68 складає 17%,
 X складає 100%

$$x = \frac{68 \cdot 100}{17} = 400.$$

Відсоткове відношення.

Приклад 3: Скільки відсотків складає число 18 від 144?

Розв'язання.

$$\text{Спосіб 1: } 18 : \frac{144}{100} = \frac{18 \cdot 100}{144} = \frac{1 \cdot 100}{8} = \frac{25}{2} = 12,5\%$$

$$\text{Спосіб 2: } \frac{18}{144} \cdot 100\% = \frac{1}{8} \cdot 100\% = 12,5\%.$$

Спосіб 3: 18 складає x %,
 144 складає 100%

$$x = \frac{18 \cdot 100}{144} = 12,5\%.$$

Розв'яжи задачі:

1. Скільки відсотків години становлять 42 хвилини?
 2. Вміст цукру в яблуках становить 9,6%. Скільки цукру міститься в 25 кг таких яблук?
 3. Ціну на товар знизили на 10% і він став коштувати 432 грн. Якою була початкова ціна товару?
-

Перевір себе

$$1. \frac{42}{60} \cdot 100 = \frac{42 \cdot 10}{6} = 70\% .$$

$$2. 25 : 100 \cdot 9,6 = \frac{1 \cdot 9,6}{4} = 2,4 \text{ кг.}$$

$$3. 432 : 90 \cdot 100 = \frac{432 \cdot 10}{9} = 480 \text{ грн.}$$

Завдання ЗНО з відсотками

Приклад 4.

Початкова вартість книги становила 136 грн. Унаслідок уцінення вартість цієї книги було зменшено на 60%.

1. Обчисліть вартість книги після уцінення (у грн).
2. Скільки відсотків становить початкова вартість книги від її вартості після уцінення?

Розв'язання.

- 1) Вартість книги після уцінення становить 40% від початкової вартості, тому
- $$136 : 100 \cdot 40 = 1,36 \cdot 40 = 54,4$$

Вартість книги після уцінення становить 54,4 грн.

- 2) Вартість книги після уцінення 54,4 грн. становить 100%, а початкова вартість книги 136 грн. становить $a\%$.

Складаємо пропорцію $\frac{54,4}{136} = \frac{100}{a}$, звідки знаходимо $a = \frac{136 \cdot 100}{54,4} = 250\%$.

Відповідь: 1) 54,4; 2) 250.

Завдання ЗНО з відсотками

Приклад 5: Задано числовий вираз

$$\frac{2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{3}}{4\frac{1}{6} - 1\frac{1}{4}} + 3\frac{3}{5}.$$

- 1) Обчисліть значення даного виразу.
- 2) Знайдіть число, якщо 25% його складає значення даного виразу.

Розв'язання.

$$1) \frac{2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{3}}{4\frac{1}{6} - 1\frac{1}{4}} + 3\frac{3}{5} = \frac{3 + \frac{13}{12}}{3 - \frac{1}{12}} + 3\frac{3}{5} = \frac{\frac{49}{12}}{\frac{35}{12}} + 3,6 = \frac{49}{35} + 3,6 = \frac{7}{5} + 3,6 = 1,4 + 3,6 = 5.$$

$$2) 5 : 25 \cdot 100 = 20$$

Відповідь: 1) 5, 2) 20.

Простий відсоток

Коли деяка величина збільшується на постійну кількість відсотків за кожний фіксований період часу, то будемо користуватись формулою виду $A_n = A_0(1 + 0,01pn)$, де A_n - деяка величина, яку одержимо після періоду часу n , $p\%$ - певні відсотки величини A_0 .

Ця формула описує багато конкретних ситуацій і називається формулою простого відсоткового зростання. Існує також формула простого відсоткового спадання $A_n = A_0(1 - 0,01pn)$.

Приклад 6.

Банк виплачує вкладникам кожного місяця 2% від суми внесеної вкладником (відсотки нараховуються на картку). Клієнт зробив вклад у розмірі 5000 грн. Яку кількість грошей матиме клієнт через півроку?

Розв'язання.

$$A_6 = 5000 \cdot (1 + 0,02 \cdot 6) = 5000 \cdot 1,12 = 5600 .$$

Відповідь 5600 грн.

Складний відсоток

Ми говоримо, що маємо справу із «складними відсотками», якщо деяка величина підлягає поетапній зміні. При цьому кожний раз її зміна складає визначене число відсотків від значення, яке ця величина мала на попередньому етапі.

Розглянемо спочатку випадок, коли у кінці кожного етапу величина змінюється на одну і ту ж постійну кількість відсотків – $p\%$.

Деяка величина A , початкове значення якої дорівнює A_0 , у кінці першого етапу буде рівна

$$A_1 = A_0 + \frac{p}{100} A_0 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right).$$

У кінці другого етапу її значення стане рівним

$$A_2 = A_1 + \frac{p}{100} A_1 = A_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2.$$

У даному випадку множник $1 + \frac{p}{100}$ показує, у скільки разів величина A збільшилась за

один етап. Неважко помітити, що степінь множника $1 + \frac{p}{100}$ співпадає з номером етапу, тобто

$$A_3 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^3, \text{ і так далі.}$$

У кінці n -го етапу

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n.$$

Ця формула показує, що величина A зростає (або зменшується при $p < 0$) як геометрична

прогресія, перший член якої дорівнює A_0 , а знаменник дорівнює $1 + \frac{p}{100}$.

Дещо складнішими є задачі, коли приріст величини A на кожному етапі змінюється. Нехай величина A в кінці першого етапу змінюється на $p_1\%$, в кінці другого етапу – на $p_2\%$, в кінці третього – на $p_3\%$ і т. д. Якщо $p_k > 0$, то величина A на цьому етапі зростає, якщо ж $p_k < 0$, то величина A на цьому етапі зменшується. Зміна величини A на $p\%$, рівносильна множенню цієї величини на множник

$1 + \frac{p}{100}$. Тому кінцевий вид шуканої формули такий:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{p_n}{100}\right)$$

Приклади задач на складні відсотки

1. Заробітну плату робітникові спочатку підвищили на 10 %, а через рік знову підвищили на 20 %. На скільки відсотків підвищилась заробітна плата робітника у порівнянні з початковою?
 2. Ціну на товар знизили на 10 %, а через місяць підвищили на 10 %. Як змінилась ціна товару?
 3. Саша за весну схуд на 20 %, за літо поправився на 30 %, за осінь схуд на 20 %, за зиму поправився на 10 %. Як змінилась його вага?
 4. Вологість повітря в полудень у порівнянні з ранком знизилась на 12 %, а потім підвищилась на 5 %, у порівнянні з полуднем. Скільки відсотків від ранкової вологості складає вологість вечірнього повітря і на скільки відсотків вона знизилась?
 5. На депозитний рахунок під 3 % річних на початку року поклали A євро. Скільки грошей буде на рахунку через n років?
-

Приклад 7. Банк приймає кошти на депозитний рахунок під 320% річних, але відсотки нараховуються щомісячно. Із нарахованої суми береться податок у розмірі 25%. Сума, що залишилась після цього додається до початкової суми на депозитному рахунку і все повторюється. У скільки разів збільшиться початкова сума через півроку? (Відповідь округліть до цілих).

Розв'язання: Так, як річна ставка на депозитному рахунку складає 320%, то щомісячна складає - $\frac{320}{12} = \frac{80}{3}\%$. Нехай сума початкового рахунку A_0 , тоді в кінці першого місяця

$$A_1 = A_0 + \left(A_0 \cdot \frac{80}{3 \cdot 100} \right) \cdot \frac{75}{100}$$

(дана формула включає податкові відрахування по рахунку у розмірі 25% - множник $\frac{75}{100}$).

Отже,

$$A_1 = A_0 \left(1 + \frac{1}{5} \right), \quad A_1 = \frac{6}{5} A_0.$$

Застосуємо формулу, що показана вище: після k -го місяця сума становить

$$A_k = A_0 \left(\frac{6}{5} \right)^k.$$

У нашому випадку, за шість місяців початкова сума на рахунку збільшиться у

$$\frac{A_6}{A_0} = \left(\frac{6}{5} \right)^6 \approx 2,9 \text{ рази.}$$

Відповідь: у три рази.

Задачі на суміші та сплави.

Розглянемо приклади задач, в умові яких мова йде про сплави, розчини або суміші двох або декілька речовин.

Основні припущення в задачах такого виду:

- а) всі одержані суміші чи сплави однорідні;
- б) при змішуванні двох розчинів, що мають об'єми v_1 і v_2 , одержуємо суміш, об'єм якої дорівнює $v_1 + v_2$.

Відмітимо, що таке припущення не завжди виконується в дійсності.



Приклад 8. Маємо шматок сплаву міді з оловом масою 12 кг, що містить 45% міді. Скільки чистого олова необхідно додати до цього шматка сплаву, щоб одержати новий сплав із вмістом міді 40%.

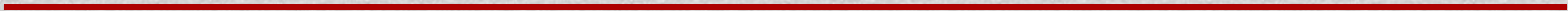
Розв'язання: Нехай x кг олова необхідно додати до сплаву, який маємо, тоді вага сплаву, який одержимо дорівнюватиме $(12 + x)$ кг. За умовою задачі складаємо таблицю:

сплав	мідь	олово	маса
I	$0,45 \cdot 12$	$0,55 \cdot 12$	12 кг
II	-	x	x кг
новий	$0,4 \cdot (12 + x)$		$12 + x$

За умовою задачі маса міді не змінювалась. Маємо рівняння

$$\begin{aligned} 0,4 \cdot (12 + x) &= 0,45 \cdot 12; \\ 0,4x &= 0,45 \cdot 12 - 0,4 \cdot 12; \\ 0,4x &= 0,05 \cdot 12; \\ 4x &= 6; \\ x &= 1,5. \end{aligned}$$

Відповідь: 1,5 кг чистого олова треба додати до сплаву.



Приклад 9. Маємо сталь двох сортів із вмістом нікелю 5% і 40%. Скільки сталі того і іншого сорту необхідно взяти, щоб після переплавки одержати 140 тон сталі із вмістом нікелю 30%?

Розв'язання: Нехай вага першого сплаву – x т, вага другого сплаву – y т.
За умовою задачі складаємо таблицю:

сплав	нікель	домішки	маса
I	$0,05x$	$0,95x$	x т
II	$0,4y$	$0,6y$	y т
новий	$0,3 \cdot 140$	$0,7 \cdot 140$	140 т

Складаємо систему рівнянь, використовуючи перший і третій стовпчики таблиці

$$\begin{cases} x + y = 140, \\ 0,05x + 0,4y = 0,3 \cdot 140; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 140, \\ 5x + 40y = 4200; \end{cases} \quad \begin{cases} -5x - 5y = -700, \\ 5x + 40y = 4200; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + y = 140, \\ 35y = 3500; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 140, \\ y = 100; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 40, \\ y = 100. \end{cases}$$

Відповідь: 40 тон сталі із вмістом нікелю 5%, 100 тон сталі із вмістом нікелю 40%.

Контрольні запитання:

- 1.Що називають відсотком від числа?
- 2.Як знайти $a\%$ від числа b ? Наведіть приклад.
- 3.Як знайти число, якщо $a\%$ від цього числа дорівнює b ? Наведіть приклад.
- 4.Як знайти, скільки відсотків становить одне число від іншого? Наведіть приклад.
5. Формула простого відсотка та її застосування. Як відрізнити простий відсоток від складного?
- 6.Як знайти нарощений через n років капітал A_n , якщо відсоткова ставка становить $b\%$, а початковий внесок становив A_0 грн?

Домашнє завдання:

Виконати тест «Завдання ЗНО з відсотками» та надіслати лист з відповідями до 30.11.2016 включно на електронну адресу znnmaimo@ukr.net з поміткою «Домашнє завдання.

Відсотки»

Текст домашнього завдання можна знайти на сайті кафедри МАіМО

<http://maimo.elit.sumdu.edu.ua/> за посиланням «Інформація для студентів», викладач Захарченко Н. М., розділ «Домашнє завдання»

*Бажаю успіхів у подальшому вивченні
відсотків*

*Відкривайте нові таємниці та сміло
крокуйте до їх вирішення*
