§1.1. Подвійний інтеграл і основні поняття та означення.

Розглянемо задачу про знаходження об'єму V просторового тіла (V), обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ - невід'ємна і неперервна в деякій замкненій області (D) функція, з боків – циліндричними поверхнями, твірні яких паралельні осі Oz, знизу – плоскою квадровною однозв'язною областю (D). Таке просторове тіло (рисунок 1) називають *циліндричним тілом* або *циліндричним бруском*.

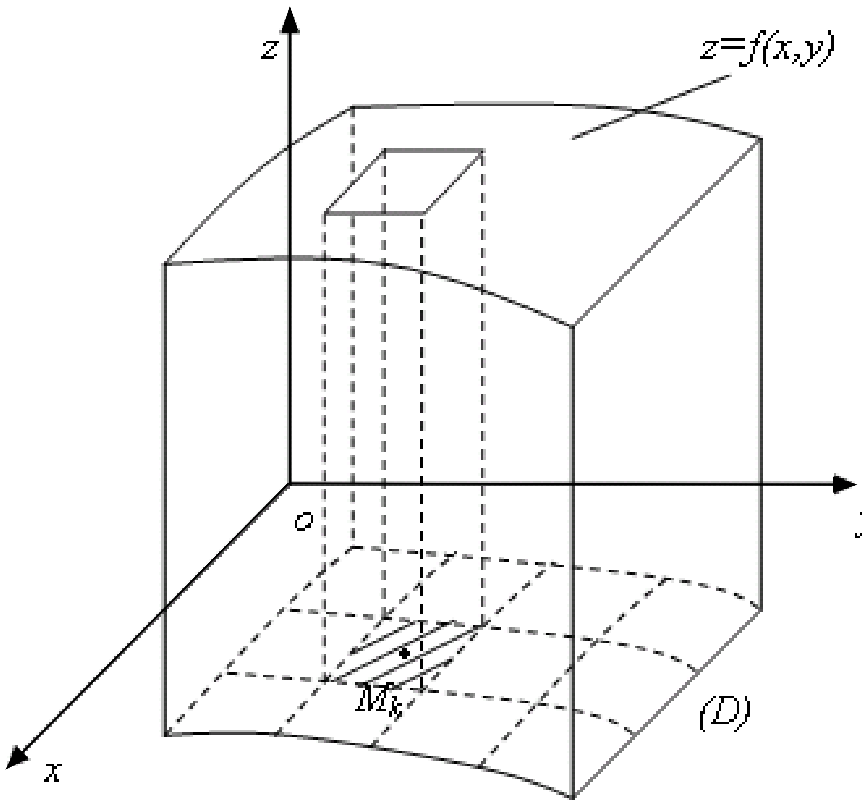


Рис.1.

Розіб'ємо довільно область (D) кривими на n областей $(D_1),(D_2),\ldots,(D_n)$ і розглянемо сукупність циліндричних тіл (брусків), основами яких є відповідно області $(D_k),\ k=1,2,\ldots,n$, і які утворюють тіло (V). У кожній області $(D_k),\ k=\overline{1,n}$ візьмемо довільну точку $M_k(\zeta_k, \eta_k)$ і знайдемо значення функції $f(\zeta_k, \eta_k)$. Об'єм k-го циліндричного тіла обчислимо за формулою

$V_k = f(\zeta_k, \eta_k)\cdot \Delta S_k$, $k = 1,2,...,n$, де ΔS_k- площа відповідної області (D_k). Додавши всі ці рівності, отримаємо наближену формулу для знаходження об'єму заданого циліндричного тіла $V \approx \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k$. Ця наближена рівність залежить від способу розбиття області (D) на частини та від вибору точок M_k і буде тим точнішою, чим меншими будуть області (D_k), $k = \overline{1, n}$. Позначимо через d_k діаметр області (D_k), тобто найбільшу відстань між двома довільними точками цієї області. Якщо існує границя $\lim\limits_{\max d_k \to 1} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k, \eta_k)\cdot \Delta S_k$, то саме її приймають за об'єм циліндричного тіла:

$$V = \lim_{\max d_k \to 1} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k .$$

Приклад про об'єм циліндричного тіла та низка інших задач, у яких з'являються границі такого типу, призводять до введення поняття подвійного інтегралу.

Нехай у плоскій обмеженій квадровній області (D) задана функція $z = f(x, y)$. Сіткою (T) кривих довільним чином розіб'ємо область (D) на частини (D_k), $k = 1,2,...,n$ (рисунок 2).

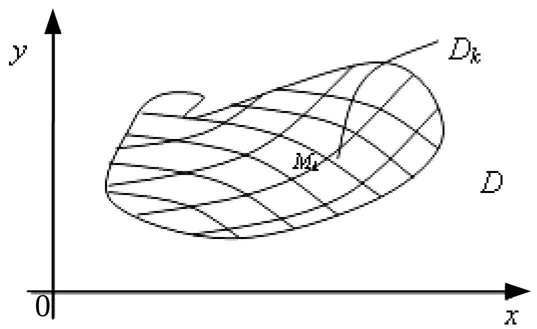


Рис.2

Позначимо через ΔS_k площу частини (D_k), через $d_k = diam(D_k)$ (довжина найбільшої з хорд, що сполучає дві довільні точки частини (D_k)), і

$d(T)=\max_k d_k$. В кожній області (D_k) довільним чином візьмемо відповідно по одній точці $M_k(\zeta_k,\eta_k)$ і складемо суму $S(T)=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k,\eta_k)\Delta S_k$, яку називають *інтегральною*. Вона залежить від (T)- розбиття області (D) на частини (D_k) та від вибору точок $M_k(\zeta_k,\eta_k)$ на кожній з них.

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k,\eta_k)\Delta S_k$ при $d(T)\to 0$, що не залежить ні від способу розбиття області (D) на частини, ні від вибору точок $M_k(\zeta_k,\eta_k)$, то цю границю називають *подвійним інтегралом функції* $f(x,y)$ *по області* (D) і позначають символом

$$\iint_{(D)} f(x,y)ds=\iint_{(D)} f(x,y)dxdy,$$

а функція $f(x,y)$ в даному випадку називається *інтегровною* в області (D).

Повертаючись до задачі про обчислення об'єму циліндричного тіла, дістанемо

$$V=\iint_{(D)} f(x,y)ds.$$

Цю рівність можна розглядати як геометричний зміст подвійного інтеграла, якщо підінтегральна функція невід'ємна в області (D).

Розглядаючи умови інтегровності функції $z=f(x,y)$ в області (D), припустимо, що вона в цій області обмежена. Проте умова обмеженості функції в (D) ще не забезпечує її інтегровності в цій області, тобто існують обмежені в (D) функції, які не є інтегровними. Прикладом такої функції є функція $f(x,y)=\begin{cases}1, x\in Q, y\in Q,\\ 0, x\in I\vee y\in I,\end{cases}$ задана в деякій обмеженій квадровній області (D).

Дійсно, задана функція є обмеженою, оскільки $|f(x,y)| \le 1$ для довільних точок $(x;y) \in (D)$. Покажемо, що ця функція не є інтегровною в цій області.

Розглянемо (T)- розбиття області (D) на частини (D_k), $k = \overline{1, n}$. У кожній такій частині існують точки $(x;y)$, де x та y - раціональні числа, і точки $(x;y)$, в яких хоча б одна з координат є ірраціональною.

Складемо інтегральну суму $S(T) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$. Якщо точки $P_k(x_k, y_k) \in (D_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ вибрати так, щоб числа x_k та y_k були раціональними, то $S(T) = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = S$, де S - площа плоскої квадровної області (D). Якщо хоча б одне з чисел x_k або y_k ірраціональне, то $S(T) = 0$. Отже сума $S(T)$ при $d(T) \to 0$ границі не має, тому задана функція $f(x;y)$ не є інтегровною в області (D).

Наведений приклад дозволяє стверджувати, що умова обмеженостіфункції в замкненій обмеженій квадровній області (D) є необхідною, але недостатньою для її інтегровності.

При вивченні подвійних інтегралів важливу роль відіграють нижня і верхня суми Дарбу

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta S_k \text{ , } \overline{S} = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta S_k \text{ ,}$$

де m_k та M_k - відповідно нижня та верхня грані множини значень функції $f(x,y)$ в області (D_k), $k = 1, 2, \ldots, n$. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області (D), то m_k та M_k є відповідно її найменшим та найбільшим значеннями в області (D_k). Оскільки

$$m_k \le f(x_k, y_k) \le M_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

то

$$\underline{S} \le S(T) \le \overline{S}.$$

Властивості сум Дарбу аналогічні відповідним властивостям сум Дарбу для одновимірного випадку. За допомогою цих сум можна встановити критерій інтегровності функції $f(x,y)$ в області (D).

Теорема (критерій інтегрованості функції**)**. *Для того, щоб обмежена в області (D) функція $f(x,y)$ була в ній інтегровною, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\lim_{d(T)\to 0}\left(\underline{S} - \overline{S}\right) = 0.$$

Сформулюємо достатню умову інтегровності функції $z = f(x,y)$.

Теорема. *Кожна функція $z = f(x,y)$, неперервна в замкненій обмеженій квадровній області (D), інтегровна в цій області.*

Зауважимо, що як і в одновимірному випадку, клас інтегровних функцій не вичерпується тільки неперервними функціями. Є ще й інші достатні умови існування подвійного інтеграла, але в подальшому ми обмежимося лише використанням сформульованої умови.

§1.2. Основні властивості подвійних інтегралів

1. $\iint\limits_{(D)} C dS = C \cdot S(D)$*, де* $C = const$ *,* $S(D)$ *- площа області* D.

Доведення. Дійсно, за означенням подвійного інтеграла маємо

$$\iint\limits_{(D)} C dS = \lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} C \cdot \Delta S_k = C \cdot \lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = C \cdot S(D).$$

Наслідок. *При C=0 та C=1 отримаємо* $\iint\limits_D 0dS = 0$ *та* $\iint\limits_D 1dS = \iint\limits_D dS = S(D)$.

2. *Якщо функція* $f(x,y)$ *інтегровна в області* (D)*, то в цій області інтегровна також і функція* $Cf(x,y)$*, де* C *- деяка стала, причому*

$$\iint\limits_{(D)} CdS = C \cdot \iint\limits_{(D)} dS .$$

Доведення. Для довільного (T)-розбиття області (D) і довільного вибору точок $M_k(\zeta_k,\eta_k) \in (D_k)$, $k=1,\ldots,n$, маємо

$$\iint\limits_{(D)} Cf(x,y)dxdy = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} Cf(\zeta_k,\eta_k)\Delta S_k = C \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k,\eta_k)\Delta S_k = C\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$$

.

3. *Якщо функції* $f_1(x,y)$ *та* $f_2(x,y)$ *інтегровні в області* (D)*, то в цій області інтегровні також функції* $f_1(x,y) \pm f_2(x,y)$*, причому*

$$\iint\limits_D \left(f_1(x,y) \pm f_2(x,y)\right)dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy .$$

Доведення. Для довільного (T)-розбиття області (D) і для довільного вибору точок $M_k(\zeta_k,\eta_k) \in (D_k)$, $k=0,\ldots,n$, маємо

$$\iint\limits_{(D)} \left(f_1(x,y) \pm f_2(x,y)\right)dxdy = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f_1(\zeta_k,\eta_k) \pm f_2(\zeta_k,\eta_k)\right)\Delta S_k =$$

$$= \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f_1(\zeta_k,\eta_k)\Delta S_k \pm \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f_2(\zeta_k,\eta_k)\Delta S_k = \iint f_1(x,y)dxdy + \iint f_2(x,y)dxdy.$$

Доведену властивість можна розповсюдити на будь-яке скінченну кількість інтегровних в області (D) функцій.

4. *Якщо функція* $f(x,y)$ *інтегровна в кожній з областей* (D_1) *і* (D_2)*, таких що* $D_1 \cap D_2 =$ ∅*, то вона також інтегровна і в області* $D = D_1 \cup D_2$*, причому* $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)dxdy$.

Доведення. При довільному (T)-розбитті області $(D) = \bigcup\limits_{k=0}^{n} (D_k)$ інтегральну суму $S(T)$, складену для функції $f(x,y)$ в цій області, можна подати у вигляді $S(T) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k = \sum\limits_{k:(D_k)\subset(D_1)} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k + \sum\limits_{k:(D_k)\subset(D_2)} f(\zeta_k, \eta_k)\Delta S_k$, причому доданки в правій частині рівності є інтегральними сумами для функції $f(x,y)$ в областях (D_1) і (D_2) відповідно. Оскільки функція $f(x,y)$ інтегровна в кожній з областей (D_1) і (D_2), то існує границя правої частини останньої рівності при $d(T) \to 0$ і дорівнює $\iint\limits_{(D_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)dxdy$. При цій умові існує й границя лівої частини цієї рівності, яка дорівнює $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$, що і треба було довести.

5. *Якщо* $f(x,y) \geq 0$ *є інтегровною в області* (D)*, то* $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \geq 0$.

При доведенні цієї властивості розглядаються інтегральні суми, які є невід'ємними з умови $f(x,y) \geq 0$.

6. *Якщо* $f_1(x,y) \geq f_2(x,y)$ *і кожна з функцій* $f_1(x,y), f_2(x,y)$ *інтегровні в області* (D)*, то* $\iint\limits_{(D)} f_1(x,y)dxdy \geq \iint\limits_{(D)} f_2(x,y)dxdy$.

Для доведення досить розглянути різницю $f_1(x,y) - f_2(x,y) \geq 0$ і скористатися попередньою властивістю.

Наслідок. *Якщо функція* $f(x,y)$ *інтегровна в області* (D), *то функція* $|f(x,y)|$ *інтегровна в цій області і* $\left|\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_{(D)} |f(x,y)|dxdy$.

Зауваження. *У прямокутній системі координат ми вважаємо, що* $dS = dxdy$.

1. ***Теорема (про середнє значення).*** *Якщо* $f(x,y)$ *неперервна в обмеженій замкненій квадровній області* D, *то існує точка* $M_0(x_0, y_0) \in D$ *така, що* $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0) \cdot S(D)$.

Доведення. Оскільки функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області (D), то вона в цій області набуває своїх найменшого m та найбільшого M значень, тобто $m \le f(x,y) \le M$, $\forall (x,y) \in (D)$. Проінтегруємо почленно цю нерівність:

$$\iint\limits_{(D)} mdxdy \le \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \le \iint\limits_{(D)} Mdxdy,$$

або

$$m\iint\limits_{(D)} dxdy \le \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \le M\iint\limits_{(D)} dxdy.$$

Оскільки $\iint\limits_{(D)} dxdy = S(D)$, то $m \cdot S(D) \le \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \le M \cdot S(D)$, або

$$m \le \frac{\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy}{S(D)} \le M. \qquad (1)$$

Позначивши $\dfrac{\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy}{S(D)} = \mu$, нерівність (1) запишемо у вигляді $m \le \mu \le M$. За теоремою Больцано-Коші про проміжне значення функції існує точка $(x_0, y_0) \in (D)$ така, що $\mu = f(x_0, y_0)$, отже, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0) \cdot S(D)$. $\boxed{\bullet}$

§1.3. Обчислення подвійних інтегралів

Подвійний інтеграл можна обчислювати безпосередньо користуючись означенням, тобто знаходити границю інтегральних сум $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{d(T)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k$. Проте такий спосіб досить громіздкий, тому застосовують інший спосіб, що зводить обчислення подвійного інтеграла до повторного інтегрування, тобто до послідовного обчислення двох одномірних інтегралів. При цьому розглядають два випадки області інтегрування: прямокутну область та криволінійну область.

Випадок прямокутної області

Нехай областю інтегрування є прямокутник (P): $a \le x \le b,\ c \le y \le d$, де a, b, c, d - довільні дійсні числа, зі сторонами, паралельними координатним осям. Також нехай в цьому прямокутнику задана деяка неперервна функція $f(x,y)$ (рисунок 3).

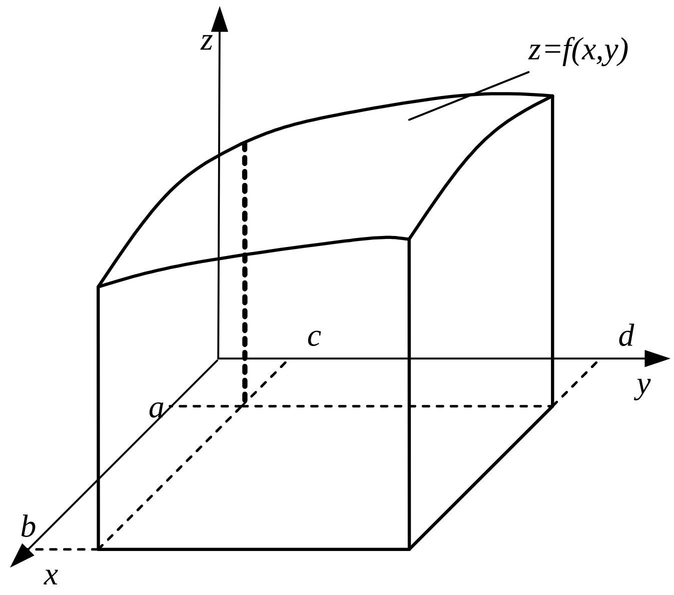


Рис.3.

Теорема. *Якщо для функції* $f(x,y)$*, визначеної та неперервної на прямокутнику* (P) *існує подвійний інтеграл* $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$ *і при кожному фіксованому значенні* $x \in [a;b]$ *існує інтеграл* $I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$*, то існує також повторний інтеграл* $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$*,при цьому і виконується рівність*

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy. \qquad (2)$$

Доведення. Розіб'ємо відрізки $[a;b]$ і $[c;d]$, що визначають прямокутник (P), на частини довільним чином:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_k < y_{k+1} < \ldots < y_{m-1} < y_m = d.$$

Тоді прямокутник (P) розіб'ється на прямокутники $(P_{ik}) = [x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}]$ ($i = 0,1,\ldots,n-1;\ k = 0,1,\ldots,m-1$).

Позначимо через m_{ik} і M_{ik} відповідно точні нижню і верхню грані функції $f(x,y)$ у прямокутнику (P_{ik}), причому справедливі нерівності

$$m_{ik} \le f(x,y) \le M_{ik}, \tag{3}$$

для $\forall i,k,$ де $i=\overline{0,n-1},\ k=\overline{0,m-1}$.

Виберемо довільно точки $\zeta_i \in [x_i, x_{i+1}],\quad i=0,1,\ldots,n-1$ і зафіксуємо їх. Проінтегрувавши нерівності (3) по змінній y на кожному з відрізків розбиття $[y_k; y_{k+1}],\ k=0,1,\ldots,m-1$, отримаємо

$$m_{ik}\Delta y_k \le \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\zeta_i, y)dy \le M_{ik}\Delta y_k, \tag{4}$$

де $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$. (Ці інтеграли існують для $\forall k=\overline{0,m-1}$ за умовою теореми.)

Додавши нерівності (4) по $k=0,1,..,m-1$, отримаємо

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \le I(\zeta_i) = \int_c^d f(\zeta_i, y)dy \le \sum_{k=0}^{n-1} M_{ik}\Delta y_k. \tag{5}$$

Всі частини нерівності (5) помножимо на $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ та знайдемо суму по всім i, де $i=0,1,\ldots,n-1$. Одержимо

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\Delta y_k \le \sum_{i=0}^{n-1} I(\zeta_i)\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \sum_{k=0}^{n-1} M_{ik}\Delta y_k.$$

Посередині отримали інтегральну суму для функції $I(x)$, а крайні члени нерівності являють собою нижню та верхню суми Дарбу для подвійного інтегралу $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$. При одночасному виконанні умов $\Delta x_i \to 0,\ \Delta y_k \to 0$, отримаємо $\lim\limits_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_k \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} I(\zeta_i)\Delta x_i = \iint\limits_{(P)} f(x,y)dP$ або

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy . \boxed{\bullet}$$

Випадок криволінійної області

Означення. Квадровна область (D) називається *криволінійною першого роду (елементарною відносно осі Ox)*, якщо вона обмежена знизу і зверху графіками неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $y = y_1(x)$, та $y = y_2(x)$ відповідно, ($y_1(x) \le y_2(x)$ для $\forall x \in [a,b]$) зліва і справа відрізками прямих $x = a,\ x = b$ (рис. 4).

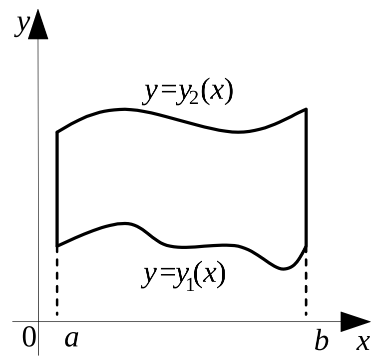


Рис.4.

Зокрема, відрізки вертикальних прямих $x = a, x = b$ можуть вироджуватись у точки перетину ліній $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$.

Теорема. *Якщо для функції $f(x,y)$, визначеної та неперервної в криволінійній області (D) першого роду, існує подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ і при кожному фіксованому значенні $x \in [a;b]$ існує інтеграл $I(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, то існує також повторний інтеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$,*

причому $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$.

Доведення випадку криволінійної області зводиться до випадку прямокутної області.

Криволінійну область (D) включимо в прямокутник $(P)=[a,b;c,d]$, поклавши $c=\min\limits_{a\le x\le b} y_1(x)$, $d=\max\limits_{a\le x\le b} y_2(x)$, та задамо в ньому функцію

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y), \text{ якщо } (x,y) \text{ належить області } (D), \\ 0, \text{в інших точках прямокутника } (P). \end{cases}$$

Ця функція задовольняє умови попередньої теореми: вона інтегровна в прямокутнику (P), оскільки в ньому співпадає з інтегровною за умовою функцією $f(x,y)$ і $\iint\limits_{(P)} f^*(x,y)dxdy=\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$. З іншого боку, $f^*(x,y)=0$ за межами області (D), і її інтеграл дорівнює нулю. Тому функція $f^*(x,y)$ є інтегровною в усьому прямокутнику (P) і

$$\iint\limits_{(P)} f^*(x,y)dxdy=\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy .$$

При фіксованому значенні $x\in[a,b]$ існує інтеграл

$$\int\limits_c^d f^*dy=\int\limits_c^{y_1(x)} f^*dy+\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*dy+\int\limits_{y_2(x)}^{d} f^*dy, \tag{6}$$

оскільки існує кожен із інтегралів справа. Але для $c\le y\le y_1(x)$ та $y_2(x)\le y\le d$ функція $f^*(x,y)=0$, тоді перший і третій інтеграли існують і рівні нулю, а отже

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)dy=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy . \tag{7}$$

З (6) та (7) маємо

$$\int\limits_c^d f^*(x,y)dy=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy . \tag{8}$$

За попередньою теоремою для функції $f^*(x,y)$ існує подвійний інтеграл, який дорівнює повторному

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy .$$

Приймаючи до уваги рівності (7), (8), отримуємо рівність

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy . \qquad (9)$$

Теорему доведено.

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, де область D обмежена лініями $x=2,\ y=x,\ xy=1.$

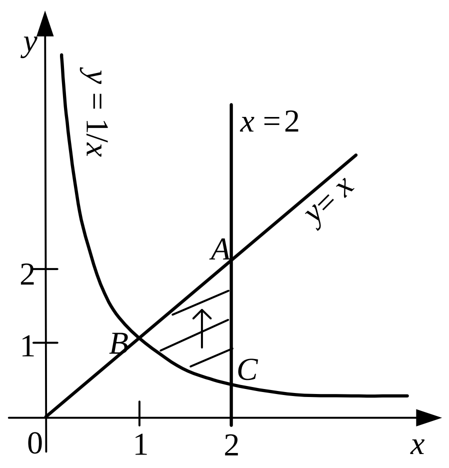


Рис.5

Розв’язання. Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують задану область інтегрування. Розв’яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} y = x \\ xy = 1 \end{cases}$, отримаємо точку $B(1,1)$, точка *A*(2,2) є точкою перетину графіків функцій $x=2$ та $y=x$, а точка

$C\left(2,\frac{1}{2}\right)$ - $x=2$ і $yx=1$. Тоді область D можна аналітично описати системою нерівностей так: $1\le x\le 2,\ \frac{1}{x}\le y\le x$ (рис. 5).

Отже, $\iint\limits_{(D)}\frac{x^2}{y^2}dxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{1/x}\frac{x^2}{y^2}dy=\int\limits_1^2\left(-\frac{x^2}{y}\right)\Bigg|_{1/x}^{x}dx=\int\limits_1^2\left(-x+x^3\right)dx=$ $=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^2=\frac{5}{2}$.

Означення. Квадровна область (D) називається *криволінійною другого роду (елементарною відносно осі* Oy*)*, якщо вона є обмеженою зліва і справа графіками функцій $x=x_1(y),\ x=x_2(y)$, знизу та зверху відрізками прямих $y=c,\ y=d$ відповідно, де функції $x_1(y)$ та $x_1(y)$ неперервні на відрізку $[c,d]$ і $x_1(y)\le x_2(y)$ для довільного $y\in[c,d]$ (рис.6).

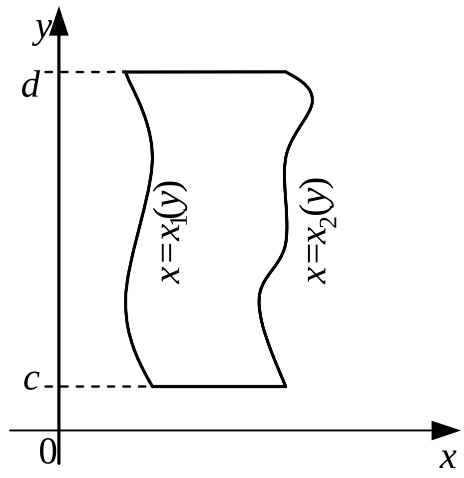


Рис.6

Зокрема, відрізки горизонтальних прямих $y=c,\ y=d$ можуть вироджуватись у точки перетину ліній $x=x_1(y), x=x_2(y)$.

Щодо останньої теореми, аналогічними міркуваннями отримаємо формулу для обчмслення подвійного інтеграла по криволінійній області другого роду: $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$.

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, якщо область *D* обмежена лініями: $y=x$, $y=2-x$, $y=0$.

Розв'язання. Область D (рис. 7) можна описати системою нерівностей так: $0 \le y \le 1,\ y \le x \le 2-y$.

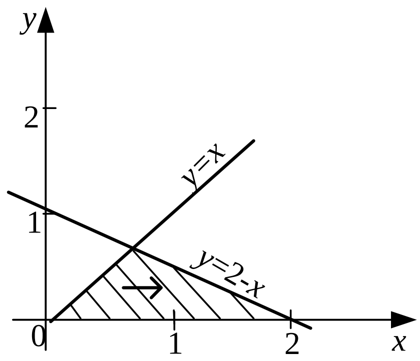


Рис.7

Переходимо до повторного інтегралу

$$\iint\limits_{(D)} (x+y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} (x+y)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_y^{2-y} dy = \int\limits_0^1 \left(2-2y^2\right)dy = \left(2y - \frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Зауваження. У випадку більш складних контурів область (D) розбивають на скінченне число частин криволінійних трапецій першого або другого роду прямими, паралельними осям координат, обчислюють інтеграли в кожній з цих частин, а потім результати додають.

§1.4. Заміна змінних у подвійному інтегралі

При обчисленні подвійних інтегралів досить часто доводиться користуватися методом заміни змінних (метод підстановок). Розглянемо деякі допоміжні твердження, необхідні для виводу відповідних формул плоскої області.

Площа в криволінійних координатах

Нехай у площині xOy задано деяку область (D), а в площині uOv - область (E), причому $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ - деякі неперервні та диференційовні в області (E) функції. Нехай $B_1(u,v) \in (E)$, а відповідна їй $A_1(x,y) \in (D)$. Візьмемо в області (E) досить малу область (E_1), яка містить точку B_1, і нехай (D_1)- образ цієї області в площині *Oxy*. Нехай також S_{xy} і S_{uv} - площі областей (D_1) та (E_1) відповідно. Відношення $\dfrac{S_{xy}}{S_{uv}}$ показує, як змінюється площа в околі точки B_1 при відображенні області (E) на область (D). Оскільки це відношення залежить від вибору області (E_1), введемо величину $|I| = \lim\limits_{d \to 0} \dfrac{S_{xy}}{S_{uv}}$, де d - діаметр області (E_1).

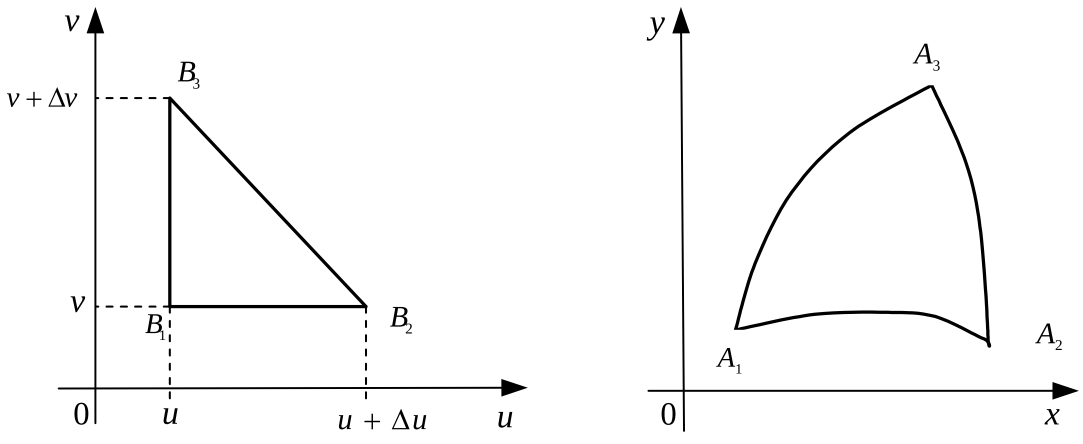


Рис.8

Для знаходження $|I|$ за (E_1) візьмемо прямокутний трикутник з вершинами $B_1(u;v)$, $B_2(u+\Delta u;v)$, $B_3(u;v+\Delta v)$, площа якого $S_{xy} = \frac{1}{2}\Delta u \Delta v$. Перетворення $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ переводить точки B_1, B_2, B_3 відповідно у точки $A_1(x(u,v); y(u,v))$, $A_2(x(u+\Delta u,v); y(u+\Delta u,v))$, $A_3(x(u,v+\Delta v); y(u,v+\Delta v))$, а прямолінійні відрізки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 - у дуги A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1. (рис. 8) Знайдемо площу S_{xy} отриманого криволінійного трикутника $A_1A_2A_3$.

При $\Delta u \to 0$ та $\Delta v \to 0$ дуги A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 також є досить малими і тому їх можна вважати прямолінійними відрізками, а прирости функцій $x(u,v)$ та $y(u,v)$ з досить великою точністю можна замінити відповідними диференціалами $x(u+\Delta u, v) - x(u,v) \approx x'_u \Delta u$, звідки

$$x(u+\Delta u, v) \approx x'_u \Delta u + x(u,v).$$

Аналогічно

$$x(u, v+\Delta v) \approx x'_v \Delta v + x(u,v),$$

$$y(u+\Delta u, v) \approx y'_u \Delta u + y(u,v),$$

$$y(u, v+\Delta v) \approx y'_v \Delta v + y(u,v).$$

Отже, маємо наближені значення координат вершин A_1, A_2, A_3, а площа S_{xy} криволінійного трикутника $A_1A_2A_3$ наближено визначається за формулою

$$S_{xy} \approx \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x'_u\Delta u & y'_u\Delta u \\ x'_v\Delta v & y'_v\Delta v \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|I(u,v)\right|\Delta u\Delta v,$$

де $I(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = x'_u y'_v - x'_v y'_u$ - *визначник Остроградського-Якобі* або *якобіан* відображення. Якщо $I(u,v) \neq 0$, отримаємо $S_{xy} \approx \left|I(u,v)\right| \cdot S_{u,v}$. Величну $|I|$ називають *коефіцієнтом викривлення площ*.

Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай маємо подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$, де функція $f(x,y)$ неперервна в деякій однозв'язній області (D). Введемо замість x та y нові змінні u та v за допомогою співвідношень $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$, де функції $x(u,v), y(u,v)$ неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку по змінним u і v в області (E), що є образом заданої області (D) у площині uOv, та $I(u,v) \neq 0$ в області (E). Розглянемо деяке (T)- розбиття області (E) на частини (E_k), $(k = 1,\dots,n)$. При цьому область (D) також розіб'ється на частини $(D_k), k = 1,\dots,n$, причому довільній точці $B_k(u_k, v_k) \in (E_k), k = 1,\dots,n$ за формулами $x_k = x(u_k, v_k)$, $y_k = y(u_k, v_k)$ відповідає точка $P_k(x_k, y_k) \in (D_k)$ для $\forall\ k = 1,\dots,n$.

За доведеним вище площі $\Delta S(D_k)$ і $\Delta S(E_k)$ областей (D_k) і (E_k) відповідно зв'язані наближеною рівністю $S(D_k) \approx \left|I(u_k, v_k)\right| \cdot S(E_k)$, $k = 1,\dots,n$, і має місце наближена рівність.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right)\Delta S\left(D_k\right) \approx \sum_{k=1}^{n} f\left(x\left(u_k, v_k\right); y\left(u_k, v_k\right)\right) \cdot \left|I\left(u_k, v_k\right)\right| \cdot \Delta S\left(E_k\right). \qquad (10)$$

Перейдемо в (10) до границі при $d = \max\limits_{1 \le k \le n} diam\left(D_k\right) \to 0$ і $\delta = \max\limits_{1 \le k \le n} diam\left(E_k\right) \to 0$:

$$\lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right)\Delta S\left(D_k\right) \approx \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x\left(u_k, v_k\right); y\left(u_k, v_k\right)\right) \cdot \left|I\left(u_k, v_k\right)\right| \cdot \Delta S\left(E_k\right).$$

У правій частині маємо інтегральну суму для функції $f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \cdot \left|I(u,v)\right|$ в області (E), що є неперервною в цій області і тому інтегровна в ній. Отже, ми отримали *формулу заміни змінних*:

$$\iint\limits_{(D)} f\left(x, y\right) dxdy = \iint\limits_{(E)} f\left(x(u,v),\ y(u,v)\right) \cdot \left|I(u,v)\right| dudv .$$

Зауважимо, що визначник $I(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \ne 0$ називається визначником *Остроградського-Якобі* або *якобіаном переходу*.

Слід зазначити, що як і в одномірному випадку, заміна змінних у подвійному інтегралі є важливим методом зведення інтегралу до вигляду, більш зручного для обчислення. Але для більш раціонального обчислення подвійного інтегралу данним методом іноді доцільно спростити не тільки підінтегральну функцію, а й область інтегрування.

Приклад. Обчислити $\iint\limits_{D} (x+y)^3 (x-y)^2 dxdy$, якщо область D - квадрат, обмежений прямими $x + y = 1,\ x - y = 1,\ x + y = 3,\ x - y = -1$.

Розв'язання. Покладемо $x+y=u,\ x-y=v$, тоді $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$. Обчислимо якобіан переходу $I=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0,\ |I|=\frac{1}{2}$.

Область (E) можна описати системою нерівностей $E=\{(u,v)|1\le u\le 3,-1\le v\le 1\}$.

За формулою заміни змінних маємо

$$\iint_D (x+y)^3(x-y)^2\,dxdy=\frac{1}{2}\iint_E u^3v^2\,dudv=\frac{1}{2}\int_1^3 u^3du\int_{-1}^1 v^2dv=\frac{20}{3}.$$

Обчислення подвійних інтегралів у полярних координатах

Відомо, що перехід від декартових координат x,y до полярних координат ρ,θ задається формулами $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$. Це відображення не є однозначним. Вигляділимо з площини $O\theta\rho$ пів смугу, яка визначається нерівностями $0\le\rho<+\infty$, $0\le\theta\le 2\pi$. Формули $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$ відображають цю півсмугу на всю площину Oxy. Зокрема, будь-яка область (E), що міститься в цій півсмузі, відображається на деяку область (D) площини Oxy. Якщо область (E) не містить точок прямих $\theta=2\pi$ або $\theta=0$, а також прямої $\rho=0$ (або містить тільки одну таку точку), то відображення (E) на (D) буде взаємнооднозначним.

Припустимо, що область (E) площини $O\theta\rho$ лежить всередині смуги і відображається на область (D) площини Oxy.

Знайдемо Якобіан переходу від декартової до полярної системи координат

$$\left|I(\rho,\varphi)\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho .$$

Використовуючи загальну формулу заміни змінних у подвійному інтегралі, запишемо формулу для обчислення подвійного інтеграла у полярних координатах.

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(E)} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\cdot \rho\, d\rho\, d\theta .$$

Приклад. Обчислити $\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, де область (D) - частина круга $x^2+y^2 \le a^2$, розташована в першій чверті.

Розв'язання. При переході до полярних координат отримаємо прямокутну область (E), що задається системою нерівностей $0 \le \rho \le a,\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

Тому $\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_{(E)} \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}d\rho d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left.\dfrac{\rho^3}{3}\right|_0^a \right) d\theta = \dfrac{1}{3}a^3\,\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi a^3}{6}.$

1.5. Застосування подвійних інтегралів

Обчислення об'ємів тіл та площ плоских фігур

Розглядаючи задачу про знаходження об'єму циліндричного тіла, ми прийшли до поняття подвійного інтеграла і отримали формулу для його обчислення

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy ,$$

де циліндричне тіло має твірні, паралельні осі Oz, обмежене знизу плоскою квадровною областю (D) площини Oxy, зверху – поверхнею $z = f(x,y)$, де функція $f(x,y)$ - неперервна та невід'ємна в області (D).

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндрами $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ і площинами $z=0$, $x+z=6$.

Розв'язання. Тіло, про яке йде мова, зверху обмежено площиною $x+z=6$, знизу – площиною Oxy $(z=0)$, спереду – поверхнею циліндра $y=\sqrt{x}$, ззаду – поверхнею циліндра $y=2\sqrt{x}$ (Рис. 9).

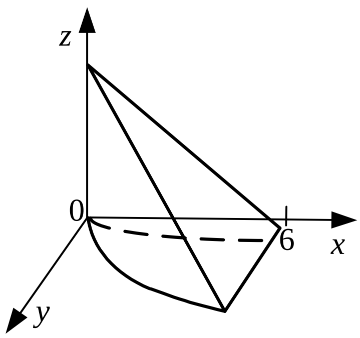


Рис.9.

Основою даного тіла є область (D), обмежена прямими $x=0$ $x=6$ і параболами $y=\sqrt{x}$ і $y=2\sqrt{x}$ (рис. 10) або $0\le x\le 6$, $\sqrt{x}\le y\le 2\sqrt{x}$.

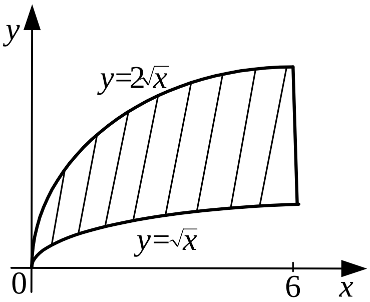


Рис.10

Оскільки геометричним зображенням функції $x+z=6$ є площина, що покриває зверху дане тіло, то ця функція і буде підінтегральною. Отже, шуканий об'єм знаходимо як

$$V=\iint\limits_{(P)}(6-x)dxdy\,.$$

Оскільки область (D) є криволінійною трапецією першого типу, то дане тіло

$$V=\int_0^6 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(6-x)dy=\int_0^6\left(6y-xy\right)\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dx=\int_0^6\left(6\sqrt{x}-x\sqrt{x}\right)dx=$$

$$=4x^{3/2}\Big|_0^6-\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^6=\frac{48\sqrt{6}}{5}.$$

Отже, $V=\dfrac{48\sqrt{6}}{5}$ куб. од.

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $z=\dfrac{a^2-x^2-4y^2}{a}$ і площиною $z=0$.

Розв'язання. З'ясуємо вигляд і розташування поверхні $z=\dfrac{a^2-x^2-4y^2}{a}$. Для цього застосуємо метод перерізів, тобто побудуємо перерізи даної поверхні координатними площинами і площинами їм паралельними.

1. Переріз площиною $xOy\,(z=0)$ – еліпс з осями $a'=a,\ b'=\dfrac{a}{2}$.

2. Перерізи площинами, паралельними площині $Oxy,\ z=h$ – еліпси

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a(a-h)}+\dfrac{y^2}{4a(a-h)}=1\\ z=h\end{cases}.$$

3. Переріз площиною $Oxz\ (y=0)$ – парабола з віссю симетрії Oz і вершиною $A(0,0,a)$ (вітки напрямлені вниз).
4. Переріз площиною $Oyz\ (x=0)$ – парабола з віссю симетрії Oz і вершиною $A(0,0,a)$ (вітки напрямлені вниз).

Точки $B_1(a,0,0)$ і $B_2(-a,0,0)$ є точками перетину поверхні з віссю Ox; точки $C_1\left(0,\dfrac{a}{2},0\right)$ і $C_2\left(0,-\dfrac{a}{2},0\right)$ – точки перетину з віссю Oy; точка $A(0,0,a)$– точка перетину з віссю Oz. Побудувавши дану поверхню і площину $z=0$, одержимо шукане тіло, об'єм якого потрібно обчислити. Очевидно, що функція $z=\dfrac{a^2-x^2-4y^2}{a}$, є парною відносно змінних *x* та *y*, а дане тіло симетричне відносно координатних площин Oxz та Oyz. Тому досить обмежитись обчисленням об'єму його четвертої частини, розташованої в першому октанті (рис. 11).

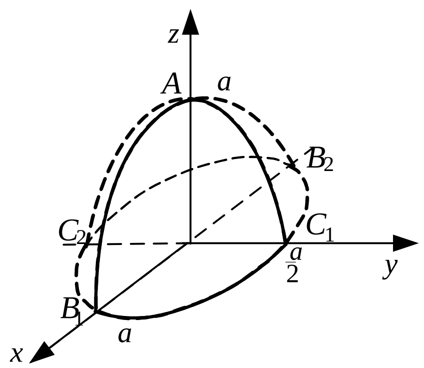


Рис.11

У нашому випадку підінтегральною функцією є $z=\dfrac{a^2-x^2-4y^2}{a}$, а областю інтегрування – частина еліпсу з осями $a'=a,\, b'=\dfrac{a}{2}$, яка розташована в першій чверті площини Oxy: $0\le x\le a$, $0\le y\le \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}$.

Тоді $\dfrac{1}{4}V=\iint\limits_{(P)}\dfrac{a^2-x^2-y^2}{a}dxdy=$

$$=\int_0^a dx\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a^2-x^2-y^2}{a}dy=\int_0^a\left(ay-\frac{x^2y}{a}-\frac{4y^3}{3a}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=\int_0^a\left(\frac{a}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2\sqrt{a^2-x^2}}{2a}-\frac{4\sqrt{a^2-x^2}^{\,3}}{24a}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$\frac{a}{3}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx-\frac{1}{3a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=\left|\begin{array}{l}x=a\sin t\\ dx=a\cos tdt\\ x=0,\ t=0\\ x=a,\ t=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right|=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt-$$

$$-\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt-\frac{a^3}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{a^3}{6}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-$$

$$-\frac{a^3}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{\pi a^3}{12}-\frac{a^3}{24}\left(e-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^3}{12}-\frac{\pi a^3}{48}=\frac{\pi a^3}{16}.$$

Отже, $V=\dfrac{\pi a^3}{4}$ куб. од.

Зауваження. *З Очевидної рівності* $\sum_{k=0}^{n-1}\Delta S_k = S(D)$*, де* $S(D)$*- площа плоскої квадровної області* (D) *безпосередньо випливає й існування* $\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta S_k = S(D)$*, тобто*

$$S(D)=\iint_D dxdy\,.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x = 4y - y^2,\ x + y = 6$.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину заданих ліній, розв'язавши систему рівнянь: $\begin{cases} x = 4y - y^2 \\ x + y = 6 \end{cases}$. Маємо $A(4{,}2),\ B(3{,}3)$, область D (рис.12) можна описати нерівностями $2 \le y \le 3,\ 6 - y \le x \le 4y - y^2$.

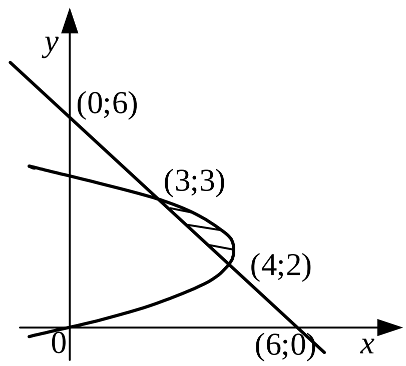


Рис.12

Отримаємо:

$$S(D)=\iint_D dxdy=\int_2^3 dy\int_{6-y}^{4y-y^2}dx=$$

$$=\int_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2}dy=\int_2^3\left(-y^2+5y-6\right)dy=\frac{1}{6}.$$

кв.од.

Застосування подвійних інтегралів при обчисленні площ поверхонь.

Як відомо площі поверхонь за допомогою кратних інтегралів знаходили ще наприкінці XVIII століття.

Нехай поверхня *(S)* задана явним рівнянням *z=f(x,y)*, її проекція на площину *Oxy* є квадровною областю *(P)* (рис.13), і в цій області функція *f(x,y)* визначена однозначно, є неперервною і має неперервні частинні похідні першого порядку по змінним *x* та *y*. Потрібно знайти площу поверхні *(S)*.

Насамперед визначимо саме поняття площі поверхні. Розіб'ємо область *(P)* сіткою кусково-гладких кривих на *n* довільних частин: $(P_1),(P_2),\ldots,(P_n)$. Через P_i позначимо площу фігури (P_i). Циліндричні стовпці, побудовані на кожній з них як на основі, розіб'ють поверхню *(S)* також на *n* частин: $(S_1),(S_2),\ldots,(S_n)$. Візьмемо в кожній частині (P_i) (*i* = 1, 2,..., *n*) довільну точку $N_i(\xi_i,\eta_i)$, якій на частині поверхні (S_i) буде відповідати точка $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$, де $\zeta_i = f(\xi_i,\eta_i)$. У кожній точці M_i $(i=\overline{1,n})$ побудуємо дотичну площину (T_i) і нормаль $\overline{n_i}$ до цієї поверхні. Якщо через γ_i позначити гострий кут між цією нормаллю і віссю *OZ*, то, як відомо, косинус цього кута виразиться формулою

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad (11)$$

де $p = f_x(\xi_i,\eta_i)$, $q = f_y(\xi_i,\eta_i)$, *i* = 1, 2,..., *n*.

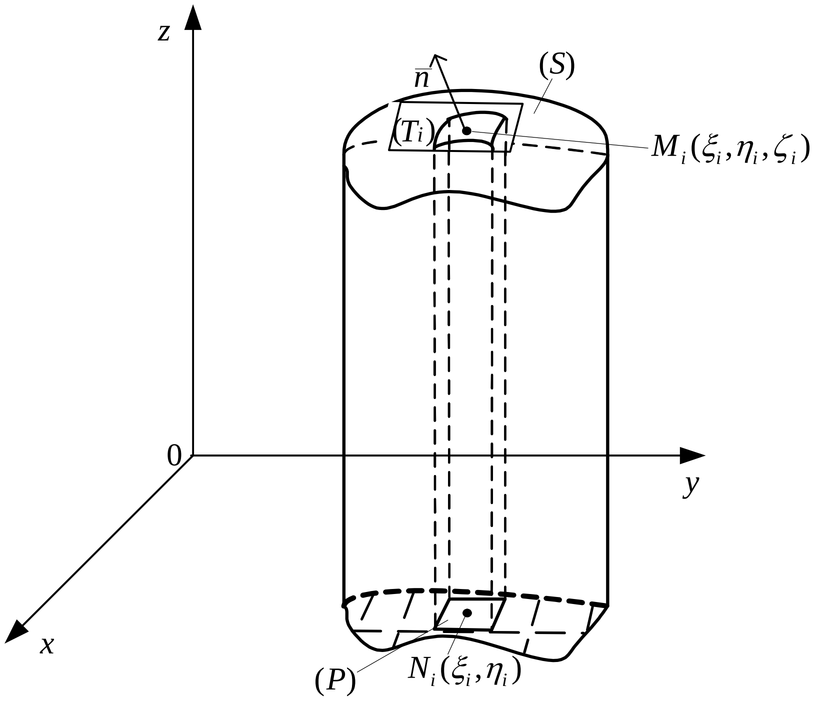


Рис. 13

Кожний з циліндричних стовпців з основою (P_i) виріже на дотичній площині (T_i) плоску фігуру, яку також позначимо через (T_i), а її площу через T_i.

Якщо частини (P_i) розбиття області *(P)* стають все меншими і меншими (при цьому враховуємо, що поверхня *(S)* гладка), то плоскі фігури (T_i) будуть все ближче прилягати до відповідної частини поверхні *(S)*. Отже, можна вважати площу плоскої фігури (T_i) наближеною мірою площі частини (S_i) даної поверхні, а суму всіх таких площ

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} T_i \tag{12}$$

наближеним значенням площі всієї поверхні *(S)*.

Під площею даної поверхні *(S)* будемо розуміти границю суми $S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}T_i$ за умови, що $\lambda\to 0$, де λ - довжина найбільшого з діаметрів областей (P_i).

Але у 1883 році німецький математик Герман Шварц показав некоректність такого означення площі поверхні. Він побудував поверхню, для якої такої границі не існує. Дана поверхня була названа циліндром Шварца (рис.14).

Рис.14

Вона являє собою циліндр, висота якого ділиться площинами, паралельними до основи циліндра, на n рівних частин. У коло, що є перетином площини і циліндра, вписують *k*-кутники, причому сусідні *k* - кут ники повернуті відносно один одного на кут $\frac{180^\circ}{k}$ ($k\geq 3, k\in N$).

Вершини *k*- кутників з’єднують так, щоб утворилася поверхня з 2*nk* трикутників; якщо *n, k* $\to\infty$, то розміри цих трикутників є нескінчено малими. Зрозуміло, що при збільшенні *k* побудована поверхня все менше відрізняється від циліндра і можна очікувати, що при *n, k* $\to\infty$ її площа (тобто сума площ всіх трикутних граней) наближається до площі бокової поверхні циліндра. Але це не так.

Проекція кожної грані *k*-кутника на основу циліндра є трикутником, утвореним стороною цього *k*- кутника та серединою дуги кола, що стягується цією стороною (рис.15).

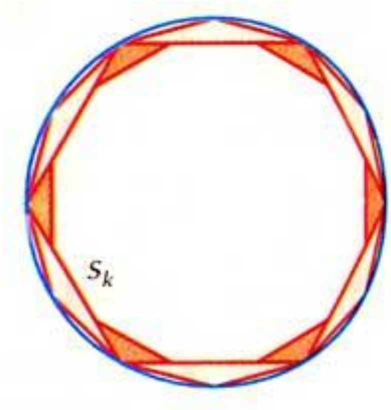


Рис.15

Площа кожного такого трикутника залежить тільки від *k*, позначимо її через S_k. Оскільки площа проекції може тільки зменшитись, то повна поверхня циліндра Шварца S є не меншою за $2nkS_k$. Тепер для кожного *k* візьмемо *n=n(k)*, яке залежить від *k*, що $n(k)\cdot S_k > 1$. При такому виборі *n(k)* маємо S >2k, а це означає, що площа *S* необмежено зростає при $k \to \infty$.

Отже,приклад оверхні Шварца показує, що визначення площі поверхні через наближення многогранниками може бути некоректним.

Покажемо, що у випадку кусково-гладкої поверхні границя $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} T_i$ існує і не залежить ні від способу розбиття області *(P)* на частини, ні від вибору точок $N_i(\xi_i, \eta_i)$ на кожній з них. Площа такої поверхні виражається так

$$S = \iint\limits_{(P)} \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}dxdy\,. \qquad (13)$$

Дійсно, кут γ_i, між нормаллю n_i і віссю *Oz* дорівнює куту між дотичною площиною до поверхні в точці M_i і площиною *Oxy*. Тому для площ плоских фігур (T_i) і (P_i) (з яких друга є ортогональною проекцією першої на площину *Oxy*) будемо мати:

$P_i = T_i \cos\gamma_i$, звідки $T_i = \dfrac{P_i}{\cos\gamma_i}$.

В силу (11) $T_i = \sqrt{1+p^2+q^2}P_i$, *i* = 1, 2,..., *n*.

Нагадаємо, що площа проекції плоскої фігури на деяку площину дорівнює добутку площі проектованої фігури та косинусу кута між площинами, в яких лежать ці фігури.

Підставляючи це значення T_i в суму (12), отримаємо:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f_x^2(\xi_i,\eta_i)+f_y^2(\xi_i,\eta_i)}P_i .$$

Ця сума є інтегральною для функції $\varphi(x,y) = \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}$.

Оскільки функція $\varphi(x,y)$ неперервна в області *(P)* (частинні похідні неперервні за умовою), то границя цієї суми при $\lambda \to 0$ існує і дорівнює подвійному інтегралу (13) [16,124].

Зауваження*. Якщо поверхня S задана як* $x=\varphi(y,z)$ *або* $y=\varphi(x,z)$*, то для площі S цієї поверхні мають місце аналогічні формули:*

$$S = \iint\limits_{(B)} \sqrt{1+\varphi_y'^2(y,z)+\varphi_z'^2(y,z)}dydz ,$$

$$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1+\varphi_x'^2(x,z)+\varphi_z'^2(x,z)}dxdz ,$$

де (B) і (D) – проекції поверхні (S) відповідно на площини Oyz і Oxz.

Розглянемо приклади обчислення площі поверхні через подвійний інтеграл.

Приклад 1. Знайти площу частини поверхні $x^2+y^2=a^2$, вирізану площинами $x+z=0$, $x-z=0$ ($x>0,\ y>0$).

Розв'язання. Дана поверхня є еліптичним циліндром. Побудуємо його, використовуючи метод перерізів.

1. Дана поверхня симетрична відносно всіх координатних площин.
2. а) З віссю *Ox* поверхня перетинається у точках $A_1(a,0,0)$ та $A_2(-a,0,0)$;

   б) з віссю *Oy* поверхня перетинається у точках $B_1(0,a,0)$ та $B_2(0,-a,0)$.

3. Знаходимо лінії перетину з координатними площинами

   а) $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$

   Перерізом є точки кола $x^2 + y^2 = a^2$. Це коло отримується і при перерізі поверхні будь-якою іншою площиною, що паралельна площині *Oxy*.

   б) $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$

   Перерізом є прямі $y = \pm a$.

   в) $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$

   Перерізом є прямі $x = \pm a$.

Побудувавши площини, отримуємо тіло, об'єм якого треба знайти (рис. 16).

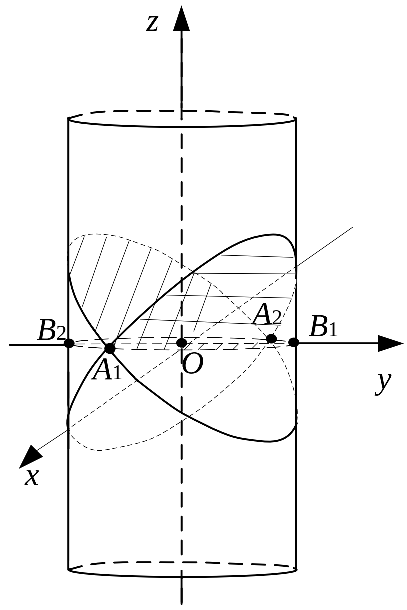


Рис.16

Площу даної поверхні обчислимо за формулою $S=\iint\limits_{(E)}\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}dxdz$. де *E* – область інтегрування. У цьому випадку областю інтегрування буде $E=\{(x,z): x\le z\le a,\ a\le z\le -x,\ 0\le x\le a\}$. Знайдемо частинні похідні функції $y=\sqrt{a^2-x^2}$: $y'_z=0,\quad y'_x=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, їх квадрати відповідно:

$(y'_z)^2=0,\ (y'_x)^2=\dfrac{x^2}{a^2-x^2}$. Отже, $S=\iint\limits_E\sqrt{1+\dfrac{x^2}{a^2-x^2}}dzdx$.

Враховуючи, що область інтегрування є симетричною відносно осі *Ox*, маємо:

$$S=2\int_0^a dx\int_0^x\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dz=2a\int_0^a\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=2a^2.$$

Отже, шукана площа поверхні дорівнює $2a^2$ (кв. од.).

Приклад 2. Знайти площу поверхні *P*, якщо *P* – частина циліндрів $x^2+y^2=\pm 2x$, розміщених всередині сфери $x^2+y^2+z^2=4$.

Розв’язання. Знайдемо область інтегрування E. Покладемо $z=0$, отримаємо: $x^2-2x+1+y^2=1$, $x^2+2x+1+y^2=1$ і $x^2+y^2=4$ або $(x-1)^2+y^2=1$, $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2$ (рис.17).

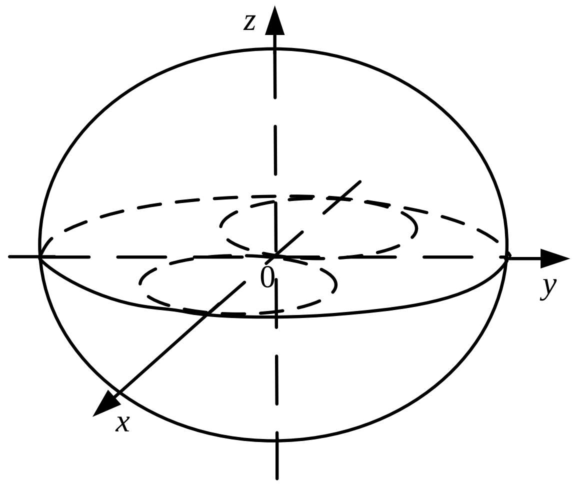


Рис.17

Вона являє собою два круга. Розглянемо один з них: $E=\{(x,y):(x-1)^2+y^2\le 1\}$. Знайдемо частинні похідні підінтегральної функції $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$: $z'_x=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $z'_y=\dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$; квадрати похідних відповідно рівні $(z_x')^2=\dfrac{x^2}{4-x^2-y^2}$ та $(z_y')^2=\dfrac{y^2}{4-x^2-y^2}$.

Підставляючи отримані дані у формулу для обчислення площі поверхні, маємо: $S=2\iint\limits_E\sqrt{1+\dfrac{x^2+y^2}{4-(x^2+y^2)}}dxdy$. (Ми врахували симетрію області інтегрування).

Оскільки маємо многочлен вигляду (x^2+y^2), то більш зручно перейти до полярної системи координат: $x=\rho\cos\Theta$, $y=\rho\sin\Theta$, $0\le\Theta\le 2\pi$. Тоді задана область інтегрування у полярних координатах є такою: $E'=\{(\rho,\Theta):\rho=2\cos\Theta, 0\le\Theta\le 2\pi\}$, а площа поверхні буде обчислюватись наступним чином:

$$S = 4\iint\limits_{E'} \sqrt{1+\frac{\rho^2}{4-\rho^2}}\rho d\Theta d\rho = 4\int\limits_0^{2\pi} d\Theta \int\limits_0^{2\cos\Theta} \rho\sqrt{\frac{4}{4-\rho^2}} d\rho = 4\int\limits_0^{2\pi} d\Theta \int\limits_0^{2\cos\Theta} \frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = ,$$ де

внутрішній інтеграл

$$\int\limits_0^{2\cos\Theta} \frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = \left| \begin{array}{l} 4-\rho^2 = t \\ -2\rho d\rho = dt \\ \rho = 2\cos\Theta,\ t = 4\sin^2\Theta \\ \rho = 0, \qquad t = 4 \end{array} \right| = \int\limits_4^{4\sin^2\Theta} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_4^{4\sin^2\Theta} = 4(1-\sin\Theta) =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} 4(1-\sin\Theta) d\Theta = 32\pi \text{ (кв.од.)}$$

Отже, шукана площа поверхні дорівнює 32π (кв. од.).

Приклад 3. Знайти площу частини поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, вирізану циліндром $x^2 + y^2 = 1$ та площинами $z = 0,\ \ y = 0$.

Розв’язання. Методом перерізів встановлюємо вигляд і властивості заданих поверхонь у декартовій системі координат. Даний конус є симетричним відносно всіх координатних площин.

1. З координатними осями поверхня перетинається в єдиній точці $A(0,0,0)$.
2. а) $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$

   Перерізом є точка *C(0, 0, 0).*

   б) $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$

   Перерізом є дві прямі $z = \pm x$, що перетинаються у початку координат.

   в) $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$

   Перерізом є дві прямі $z = \pm y$, що перетинаються у початку координат.
3. $\begin{cases} z = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$

Перерізом є кола $x^2 + y^2 = 1$ та $x^2 + y^2 = -1$.

Перетином конуса і циліндра є коло $x^2 + y^2 = 1$, що знаходиться у площинах $z = 1$ та $z = -1$ (рис.18).

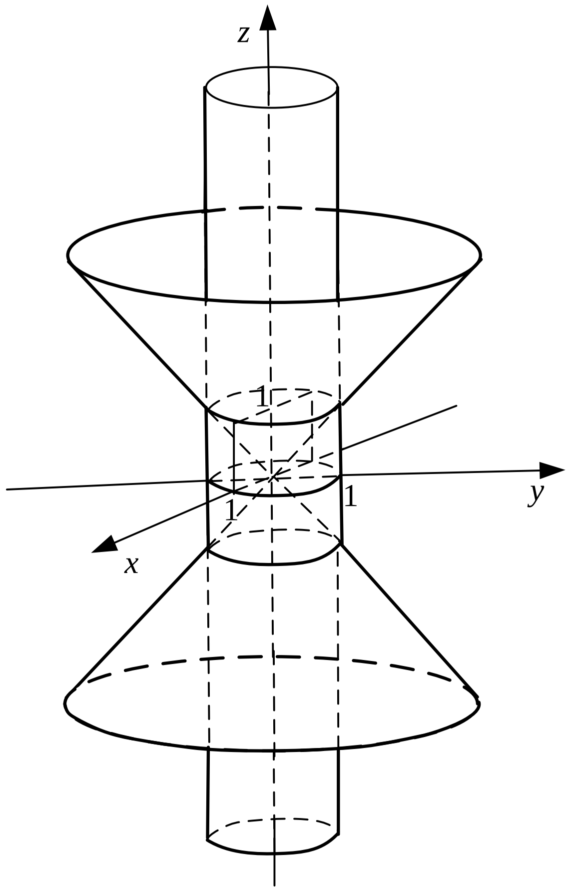


Рис.18

Розглянемо детальніше ту частину конуса, поверхню якої будемо знаходити (рис.19).

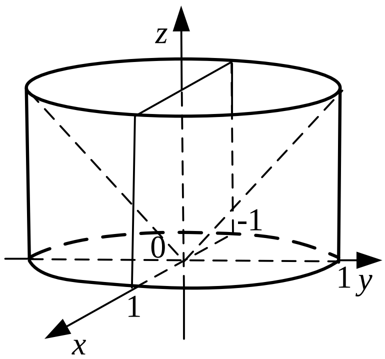


Рис.19

Е – область інтегрування і $E=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$. Знайдемо частинні похідні функції $z=\sqrt{x^2+y^2}$: $z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, їх квадрати відповідно: $(z_x')^2=\frac{x^2}{x^2+y^2}$ та $(z_y')^2=\frac{y^2}{x^2+y^2}$.

За формулою для обчислення площі поверхні маємо:

$$S=\iint_E\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}\iint_E dxdy .$$

За умови даної задачі доцільніше перейти до полярної системи координат. Тоді область інтегрування має вигляд: $E'=\{(\rho,\Theta):\rho\le 1, 0\le\Theta\le\pi\}$, а площа поверхні дорівнює:

$$S=\sqrt{2}\iint_{E'}\rho d\rho d\Theta=\sqrt{2}\int_0^{\pi}d\Theta\int_0^1\rho d\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi}d\Theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi .$$

Отже, шукана площа поверхні дорівнює $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ (кв. од.).

Приклад 5. Знайти площу поверхні $(x+y)^2+2z=1$, якщо $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$.

Розв’язання. Розглянемо задану поверхню у першому октанті. Методом перерізів встановлюємо вигляд заданої поверхні.

1. Знайдемо точки перетину даної поверхні з координатними осями у першому октанті:

   а) точкою перетину поверхні з віссю *Oz* є точка $C(0,\ 0,\ \frac{1}{2})$;

   б) точкою перетину поверхні з віссю *Oy* є точка *D(0,1,0)*;

   в) точкою перетину поверхні з віссю *Ox* є точка *D(1,0,0)*.

2. Знайдемо лінії перерізу з координатними площинами:

а) $\begin{cases} z=0 \\ (x+y)^2+2z=1, \end{cases}$ перерізом є пряма $y=1-x$.

б) $\begin{cases} y=0 \\ (x+y)^2+2z=1, \end{cases}$ перерізом є парабола $z=\dfrac{1-x^2}{2}$.

в) $\begin{cases} x=0 \\ (x+y)^2+2z=1, \end{cases}$ перерізом є парабола $z=\dfrac{1-y^2}{2}$.

Поверхню $(x+y)^2+2z=1$, обмежену площинами $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$, зображено на рис.20.

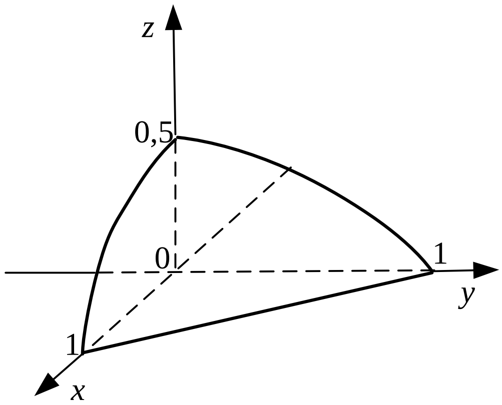


Рис.20

Область інтегрування у декартових координатах $E=\{(x,y): y\le 1-x, x\ge 0, y\ge 0\}$.

Знайдемо частинні похідні функції $z=\dfrac{1-(x+y)^2}{2}$: $z'_x=-(x+y)$ та $z'_y=-(x+y)$, їх квадрати відповідно рівні : ${z'_x}^2=(x+y)^2$ і ${z'_y}^2=(x+y)^2$. Формула для знаходження площі поверхні, має вигляд: $S=\iint\limits_E \sqrt{1+2(x+y)^2}\,dxdy$. Очевидно, що для зручності обчислень слід перейти до узагальнених полярних координат: $x=\rho\cos^2\Theta, y=\rho\sin^2\Theta$, при цьому областю інтегрування є область $E'=\left\{(\rho,\Theta):\rho=1, 0\le\Theta\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Обчислимо Якобіан:

$$I(\rho,\Theta)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\Theta \\ y'_\rho & y'_\Theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos^2\Theta & -2\rho\cos\Theta\sin\Theta \\ \sin^2\Theta & 2\rho\sin\Theta\cos\Theta \end{vmatrix}=2\rho\sin\Theta\cos^3\Theta+2\rho\cos\Theta\sin^3\Theta=\rho\sin 2\Theta.$$

Отже $S=\iint\limits_{E'}\sqrt{1+2\rho^2}\rho\sin 2\Theta d\rho d\Theta=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\Theta d\Theta\int\limits_0^1\rho\sqrt{1+2\rho^2 d\rho}=\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\Theta d\Theta=\frac{1}{3}$

(кв. од.).

Шукана площа заданої поверхні дорівнює $\frac{1}{3}$ (кв. од.).

Приклад 6. Знайти площу поверхні P, де P - частина поверхні $x^2+y^2=z^2$, $z\geq 0$, що міститься всередині циліндра $\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$.

Розв'язання. Очевидно, що областю інтегрування є область, обмежена контуром $\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$. У даному випадку для зручності обчислення площі поверхні доцільно перейти до полярної системи координат: областю інтегрування буде область $\left(D'\right)=\left\{(\rho,\varphi):\rho=\sqrt{\sin 2\varphi},\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},\ \pi\leq\varphi\leq\frac{3\pi}{2}\right\}$.

Побудуємо її, встановивши відповідність між ρ та φ за допомогою таблиці:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
ρ	0	0,93	1	0,93	0	0	0,93	1	0,93	0

Дана крива зображена на рис. 21.

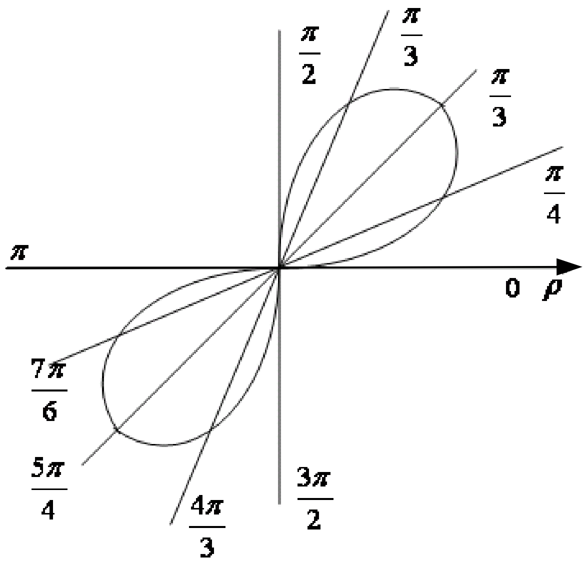


Рис. 21

Частинні похідні функції $z=\sqrt{x^2+y^2}$ дорівнюють: $z'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ та $z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Знайдемо $S=4\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=4\sqrt{2}\iint\limits_{(D)}dxdy$.

Для зручності обчислень перейдемо до полярної системи координат та отримаємо:

$$S=4\sqrt{2}\iint\limits_{(D')}\rho d\rho d\varphi=4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}}\rho d\rho=2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi=2\sqrt{2}\ \text{(кв. од.)}$$

Обчислення фізичних величин

Маса плоскої пластини

Нехай маємо плоску фігуру (*P*), по якій неперервно розподілена з поверхневою густиною $\rho=\rho(x,y)$, де $\rho(x,y)$ - неперервна функція.

На плоскій фігурі (*P*) виберемо довільну точку $M(x,y)$ і нехай (D) - довільний окіл цієї точки, що повністю належить (*P*). Позначимо через $m(D)$ - масу плоского околу (D), а через $S(D)$ - його площу. Розглянемо границю відношення $m(D)$ до $S(D)$ за умови, що $S(D)\to 0$. Саме її ми і будемо називати поверхневою густиною маси в точці $M(x,y)$ фігури (*P*), тобто $\rho(x,y)=\lim\limits_{S(D)\to 0}\frac{m(D)}{S(D)}$.

Якщо маса розподілена рівномірно по області, то її поверхнева густина є сталою, тобто $\rho(x,y)=const$.

Розглянемо випадок, коли маса розподілена нерівномірно.

Нехай m - маса плоскої фігури (*P*). Розіб'ємо цю фігуру сіткою кусково-гладких кривих на n довільних частин: $(P_1),(P_2),...,(P_n)$. Позначимо через $S(P_1),S(P_2),...,S(P_n)$ їх площі відповідно, а через $m_1,m_2,...,m_n$ - маси. У кожній частині (P_k), $k=1,2,...,n$, візьмемо довільно точку $M(\xi_k,\eta_k)$ і обчислимо в ній густину $\rho(\xi_k,\eta_k)$.

Якщо частини розбиття є досить малими, то в силу неперервності функції $\rho(x,y)$ можна вважати, що маса m_k фігури (P_k) наближено дорівнює $\rho(\xi_k,\eta_k)\cdot S(P_k)$, а маса m усієї фігури (*P*) наближено дорівнює

$$m=\sum_{k=1}^{n}m_k=\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\cdot S(P_k).$$

Тоді $m=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\cdot S(P_k)$, де $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\lambda_k$ (λ_k - діаметри частинних областей (P_k), $k=1,2,...,n$).

Оскільки ми маємо границю інтегральної суми, складеної для неперервної функції $\rho(x,y)$ в області (*P*), то ця границя існує і дорівнює $\iint\limits_{(P)}\rho(x,y)dxdy$, тобто

$$m=\iint\limits_{(P)}\rho(x,y)dxdy.$$

Приклад 7.

Заайти масу пластини *D* густини *γ = yx*^{3}, якщо $D:\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\ x\ge 0,\ y\ge 0.\end{cases}$

Розв'язання.

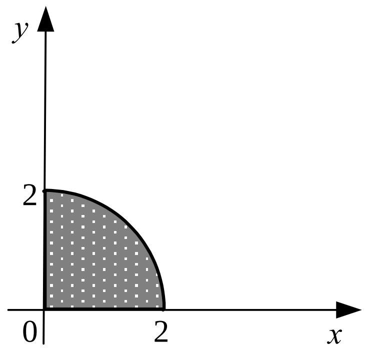


Рис.22

$$m=\iint_D \gamma(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} yx^3dy=\int_0^2 x^3dx\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 x^3(4-x^2)dx=\frac{1}{2}\left(x^4-\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}.$$

Приклад 8.

Знайти момент інерції однорідної круглої пластини

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 4b^2$ відносно початку координат.

Розв'язання.

В силу однорідності пластини покладемо її густину $\gamma(x,y)=1$.

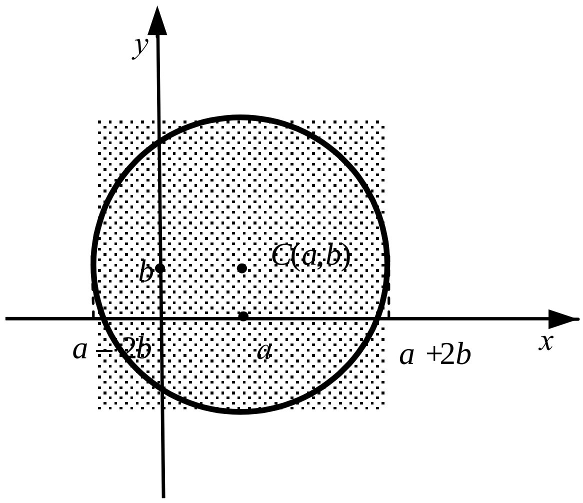


Рис.23

Центр круга розміщений в точку *C*(*a*, *b*), а його радіус дорівнює 2*b*.

Рівняння меж пластини мають вигляд:

$$y = b \pm \sqrt{4b^2 - (x-a)^2}.$$

$$I_0 = \iint\limits_D \gamma (x^2 + y^2)dxdy = \int\limits_{a-2b}^{a+2b} dx \int\limits_{b-\sqrt{4b^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{4b^2-(x-a)^2}} (x^2+y^2)dy =$$

$$= \int\limits_{a-2b}^{a+2b} dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{b-\sqrt{4b^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{4b^2-(x-a)^2}} = \int\limits_{a-2b}^{a+2b} x^2 \left(b + \sqrt{4b^2-(x-a)^2} - b + \sqrt{4b^2-(x-a)^2} \right) dx +$$

$$+ \frac{1}{3} \int\limits_{a-2b}^{a+2b} \left(\left(b + \sqrt{4b^2-(x-a)^2} \right)^3 - \left(b - \sqrt{4b^2-(x-a)^2} \right)^3 \right) dx = I_1 + I_2.$$

Обчислимо кожен з отриманих інтегралів окремо.

Для обчислення інтеграла I_1 зробимо заміну: $x - a = 2b\sin t$,

$x = a + 2b\cos t,\ dx = 2b\cos t dt,$ якщо *x* = *a* – 2*b* $t = -\dfrac{\pi}{2}$, якщо *x* = *a* + 2*b* $t = \dfrac{\pi}{2}$.

$$I_1 = 2\int\limits_{a-2b}^{a+2b} x^2\sqrt{4b^2-(x-a)^2}\,dx = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(a+2b\sin t\right)^2 4b^2\cos^2 t dt =$$

$$= 8a^2b^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt + 32ab^3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\sin t dt + 32b^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt =$$

$$= 4a^2b^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt - 32ab^3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t d\cos t + 8b^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt =$$

$$= 4\pi a^2b^2 - 0 + 4b^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)dt = 4\pi a^2b^2 + 4\pi b^4;$$

Для обчислення інтеграла I_2 перетворимо підінтегральну функцію за формулою різниці кубів:

$$\left(b+\sqrt{4b^2-(x-a)^2}\right)^3 - \left(b-\sqrt{4b^2-(x-a)^2}\right)^3 =$$
$$= 2\sqrt{4b^2-(x-a)^2}\,(7b^2-(x-a)^2).$$

Тоді

$$I_2 = \frac{2}{3}\int\limits_{a-2b}^{a+2b} \sqrt{4b^2-(x-a)^2}\left(7b^2-(x-a)^2\right)dx = \frac{2}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4b^2\cos^2 t\left(7b^2-4b^2\sin^2 t\right)dt =$$

$$= \frac{56}{3}b^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - \frac{32}{3}b^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{28}{3}\pi b^4 - \frac{4}{3}\pi b^4 = 8\pi b^4.$$

Відповідно, $I_0 = I_1 + I_2 = 4\pi b^2\left(a^2+3b^2\right).$

Приклад 9.

Знайти центр тяжіння однорідної пластини D, обмеженої кривими $y^2 = ax$ і $y = 2\sqrt{2}a^2x^2$.

Розв’язання.

Оскільки пластина однорідна, тобто її густина постійна, то можна прийняти її за одиницю.

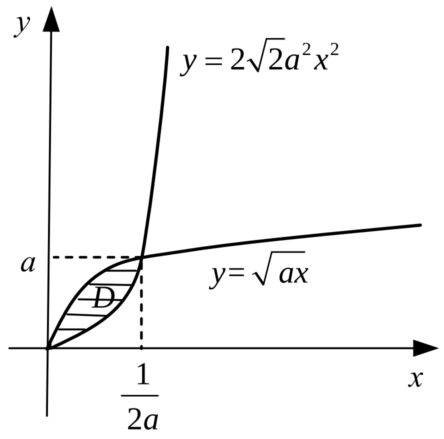


Рис.24

Тоді $x_c = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy}$, $\quad y_c = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}$.

Знайдемо масу пластини, а для цього визначимо абсцису точки перетину ліній, що її обмежують:

$$\sqrt{ax} = 2\sqrt{2}a^2x^2, \quad ax = 8a^4x^4, \quad ax\left(8a^3x^3 - 1\right) = 0, \quad x_1 = 0,\, x_2 = \frac{1}{2a}.$$

$$m = \int\limits_0^{\frac{1}{2a}} dx \int\limits_{2\sqrt{2}a^2x^2}^{\sqrt{ax}} dy = \int\limits_0^{\frac{1}{2a}} \left(\sqrt{ax} - 2\sqrt{2}a^2x^2\right) dx = \left(\frac{2\sqrt{a}}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}a^2x^3\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2a}} = \frac{\sqrt{2}}{12a};$$

$$M_y = \int\limits_0^{\frac{1}{2a}} xdx \int\limits_{2\sqrt{2}a^2x^2}^{\sqrt{ax}} dy = \int\limits_0^{\frac{1}{2a}} \left(\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}a^2x^3\right) dx = \left(\frac{2\sqrt{a}}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}a^2x^4\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2a}} = \frac{3\sqrt{2}}{160a^2};$$

$$x_c = \frac{3\sqrt{2}}{160a^2} : \frac{\sqrt{2}}{12a} = \frac{9}{40a}.$$

Відповідно

$$M_x = \int\limits_0^{\frac{1}{2a}} dx \int\limits_{2\sqrt{2}a^2x^2}^{\sqrt{ax}} ydy = \int\limits_0^{\frac{1}{2a}} \left(\frac{ax}{2} - 4a^4x^4\right) dx = \left(\frac{a}{4}x^2 - \frac{4a^4}{5}x^5\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2a}} = \frac{3}{80a},$$

$$y_c = \frac{3}{80a} : \frac{\sqrt{2}}{12a} = \frac{9\sqrt{2}}{40}.$$

§1.6. Розв'язування задач

Розглянемо на прикладах розв'язування основних типів задач на застосування подвійного інтеграла.

1. Записати подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ в області D, обмеженої прямою $y=x$ і параболою $y=x^2$, у вигляді повторних інтегралів двома способами (рис.25).

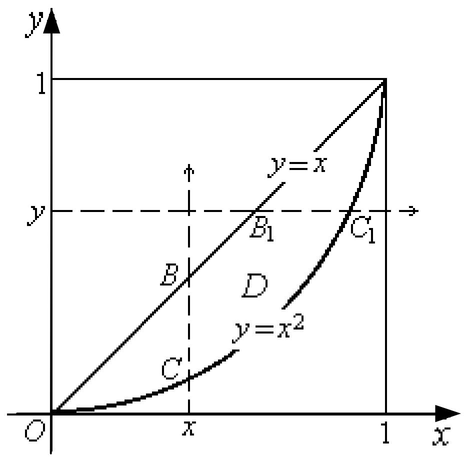


Рис.25

Розв'язання. На рисунку 25 зображена область інтегрування D. Знайдемо точки перетину ліній $y = x$ і $y = x^2$: $O(0;0)$, $A(1;1)$.

Спочатку застосуємо формулу (9), тобто внутрішній інтеграл беремо по y, вважаючи x сталою, а зовнішній інтеграл – по x. Область D знаходиться в смузі між прямими $x = 0$ і $x = 1$, відповідно, $0 \le x \le 1$. Щоб знайти межі зміни для y, візьмемо на осі Ox довільну точку $x \in (0,1)$ і проведемо через неї пряму, паралельну осі Oy у додатному напрямку. Вона перетинає межу області D спочатку в точці C, потім в точці B (рис. 25). У точки C ордината $y = x^2$, у точки B ордината $y = x$, тобто $x^2 \le y \le x$.

Отже, $D = \{(x, y)\colon 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$. Тоді, згідно (9), маємо

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy.$$

Застосуємо до обчислення подвійного інтеграла формулу (7). У цьому разі внутрішній інтеграл беремо по змінній x, вважаючи y сталою, а зовнішній – по y. Область D знаходиться в смузі між прямими $y = 0$ і $y = 1$, відповідно, $0 \le y \le 1$. Для того, щоб встановити межі зміни змінної x, візьмемо на вісі Oy довільну точку $y \in (0,1)$ і проведемо через неї пряму, паралельну осі Ox у додатному напрямку. Оскільки точка B_1, що лежить на межі області D, має абсцису $x = y$, а точка C_1 – межі області D, де пряма виходить з області, має абсцису $x = \sqrt{y}$, то змінна x змінюється від y до $\sqrt{y}$. Отже, $D = \{(x, y)\colon 0 \le y \le 1,\ y \le x \le \sqrt{y}\}$. За формулою (7), маємо

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

2. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^{1} f(x,y)dx.$$

Розв’язання. На відміну від першого завдання, тут не задана явна область інтегрування D, ми повинні з'ясувати її вигляд за відомими межами інтегрування у повторних інтегралах. Позначимо через D_1 область інтегрування першого повторного інтеграла, D_2 – другого. Враховуючи верхні і нижні межі інтегрування, маємо,що область D_1 задається нерівностями $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le \sqrt{y}$, тобто $D_1 = \{(x, y)\colon 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{y}\}$, а область D_2 – $1 \le y \le e$, $\ln y \le x \le 1$, тобто $D_2 = \{(x, y)\colon 1 \le y \le e,\ \ln y \le x \le 1\}$. Очевидно, $D = D_1 \cup D_2$ (рис.26).

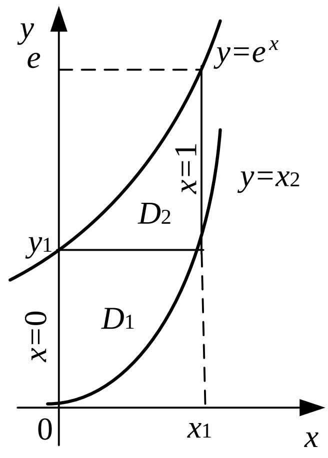


Рис.26.

Область D розташована у вертикальній смузі між прямими $x = 0$, $x = 1$ та між лініями $y = x^2$, $y = e^x$. Це означає, що $D = \{(x, y): 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le e^x\}$. Тоді за формулою (9) отримуємо

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{e^x} f(x,y)\ dy.$$

3. Обчислити $I = \int\limits_0^5 dx \int\limits_0^{5-x} \sqrt{4+x+y}\ dy$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^5 dx \int\limits_0^{5-x} \sqrt{4+x+y}dy = \left| \begin{array}{ll} 4+x+y=t & \\ dy=dt & \\ y=0, & t=4+x \\ y=5-x, t=9 & \end{array} \right| = \int\limits_0^5 dx \int\limits_{4+x}^{9} \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}\int\limits_0^5 \left(t^{3/2}\Big|_{4+x}^{9} \right) dx = \frac{2}{3}\int\limits_0^5 \left(\sqrt{9^3} - \sqrt{(4+x)^3} \right) dx =$$

$$\frac{2}{3}\left(27x\Big|_0^5 - \frac{2}{5}(4+x)^{5/2}\Big|_0^5 \right) = \frac{2}{3}\left(27\cdot 5 - \frac{2}{5}\left(3^5 - 2^5\right) \right) = \frac{506}{15}.$$

4. Обчислити $I = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 x\ dx \int\limits_0^a ydy$.

Розв’язання.

$$I=\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx\int_0^a y\,dy=\int_0^{2\pi}\cos^2 x\cdot\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^a\right)dx=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{a^2}{4}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{2}\cdot\pi.$$

5. Обчислити: $I=\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, де D обмежена прямими $y=x$ і $x=2$ і гіперболою $xy=1$.

Розв’язання. Побудуємо область інтегрування (рис.27).

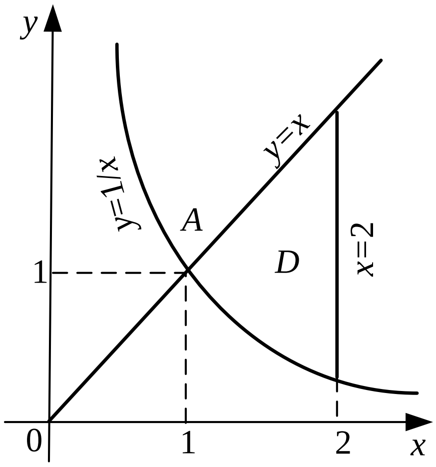


Рис.27

Розв’язуючи систему, що складається з рівнянь прямої $y=x$ і гіперболи $xy=1$, отримаємо координати точки їх перетину $A(1,1)$. Для обчислення інтеграла по області D зручно скористатися формулою (9). Межі зовнішнього інтеграла по x – це абсциси самої лівої і самої правої точок області D , тобто $x=1$ і $x=2$. Якщо $1\le x\le 2$, то y буде змінюватися від $1/x$ до x, відповідно.

Отже, $D = \{ (x; y): 1\le x\le 2,\ 1/x\le y\le x \}$.

Тоді $I=\int_1^2 dx\int_{1/x}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=\int_1^2 x^2dx\int_{1/x}^{x}\frac{dy}{y^2}=\int_1^2 x^2dx\left(\frac{-1}{y}\right)\Bigg|_{1/x}^{x}=\int_1^2 x^2dx\left(\frac{-1}{x}+x\right)=$

$$=\int_1^2\left(x^3-x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{9}{4}.$$

Якщо для знаходження інтеграла застосувати формулу (7), то обчислення будуть більш громіздкими.

6. Обчислити $I=\iint\limits_D y^2\cos\frac{xy}{2}dxdy$, де D – область, обмежена лініями x=0, $y=\sqrt{2\pi}$, y =2x.

Розв’язання. Знайдемо абсцису точки перетину прямих y=2x і $y=\sqrt{2\pi}$: $\sqrt{2\pi}$ =2x $\Rightarrow$ $x=\sqrt{\pi/2}$. Область інтегрування D зображена на рисунку 28.

$$D=\{(x;y):\ 0\le y\le\sqrt{2\pi},\ 0\le x\le y/2\}$$

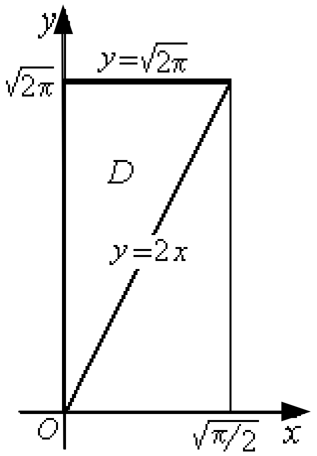


Рис.27

За формулою (7) маємо

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} y^2dy\int_0^{\frac{y}{2}}\cos\frac{xy}{2}dx=\int_0^{\sqrt{2\pi}} y^2\frac{2}{y}\sin\frac{xy}{2}\Bigg|_0^{y/2}dy=2\int_0^{\sqrt{2\pi}} y\sin\frac{y^2}{4}dy=$$

$$=4\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin\frac{y^2}{4}d\left(\frac{y^2}{4}\right)=-4\cos\frac{y^2}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{2\pi}}=-4\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=4.$$

7. Обчислитиь: $\iint_D (x+y)dxdy$, де D – область, обмежена лініями x=0, y=0, x+y =3.

Розв'язання. Пропонуємо самостійно побудувати область інтегрування. Вона має вигляд $D = \{(x;\ y)\colon 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3-x\}$. За формулою (9) отримуємо:

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (x+y)dy = \int_0^3 \left(x\int_0^{3-x} dy + \int_0^{3-x} ydy \right) dx = \int_0^3 \left(x(3-x) + \frac{(3-x)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left(3x - x^2 + \frac{9}{2} - 3x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{9}{2}x - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{6} = \frac{18}{2} = 9.$$

Зауваження.У випадках, коли областю інтегрування D є круг, або частина круга, або коли підінтегральна функція містить у собі двучлен вигляду (x^2+y^2), обчислення подвійного інтеграла спрощюється при переході до полярних координат (див. формули (9) – (12)). У цьому випадку двочлен (x^2+y^2) перетворюється на r^2.

8. Обчислити $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, де D={(x,y): x^2+y^2≤4, y≥0}.

Розв'язання. Перейдемо у рівнянні кола x^2+y^2=4 до полярних координат: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Маємо: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 4$ або $r^2 = 4$, звідси $r = 2$.

Областю інтегрування є частина круга, розміщена у півплощині $y \ge 0$ (рис. 28,a).

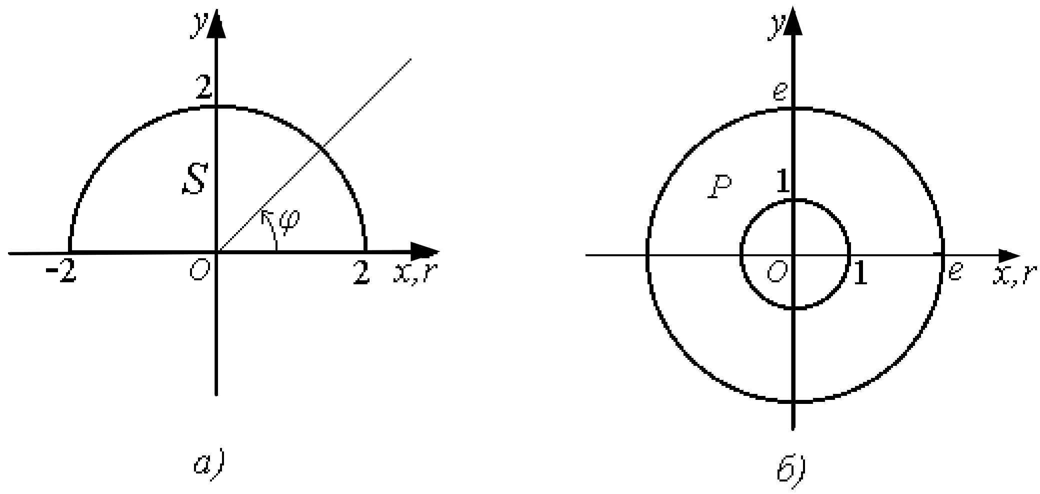


Рис.28

Отже кут φ змінюється від $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$. Маємо, що при $0 \le \varphi \le \pi$, полярний радіус r буде змінюватися від 0 до 2: $D = \{(r, \varphi): 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le r \le 2\}$. За формулами (11) і (12) отримуємо

$$\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4-r^2}\,r\,dr = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}\right)\left(4-r^2\right)^{1/2} d\left(4-r^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left.\frac{2\left(4-r^2\right)^{3/2}}{3}\right|_0^2 d\varphi = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(0-\frac{16}{3}\right)d\varphi = \frac{8}{3}\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{8}{3}\pi .$$

9. Обчислити $\iint\limits_P \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy$, де P – кільце між колами радіусів e і 1 з центром у початку координат.

Розв'язання. На рисунку 21,*б* зображена область P. Рівняння заданих кіл у декартових координатах мають вигляд $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=e^2$, а в полярних ці кола задаються формулами $r = 1$ і $r = e$. Відповідно, $P=\{(r,\varphi): 0 \le \varphi \le 2\pi, 1 \le r \le e\}$. За формулами (11) і (12) знаходимо:

$$\iint\limits_P \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^e \frac{\ln r^2}{r^2}\cdot r\cdot dr = \begin{vmatrix} \ln r^2 = t \\ \dfrac{1}{r^2} rdr = dt \\ r=1,\ t=0 \\ r=e,\ t=2 \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 tdt = \int\limits_0^{2\pi} \frac{t^2}{2}\bigg|_0^2 d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \varphi\bigg|_0^{2\pi} = 2\pi\ .$$

10. Обчислити площу фігури D, обмеженої лініями $y^2 = 4x + 4$, $y=2–x$.

Розв’язання. Данна фігура зображена на рисунку 29,*а*.

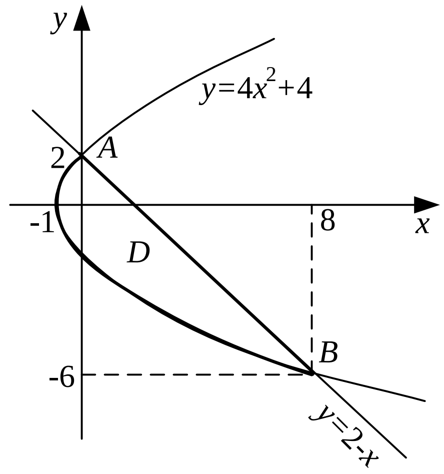


Рис 29а

Розв’язуючи систему рівнянь $\begin{cases} y^2 = 4x + 4, \\ y = 2 - x, \end{cases}$ знайдемо точки перетину ліній: $(2 - x)^2 = 4x + 4$, $x^2 – 8x = 0$, $x_1=0$, $x_2=8$, $y_1=2$, $y_2=–6$. Отже, лінії перетинаються в точках $A(0,2)$, $B(8,6)$, а область D є такою: $-6 \le y \le 2$, $\frac{y^2-4}{4} \le x \le 2-y$. За формулою (7) знайдемо площу заданої фігури D:

$$S(D) = \int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{(y^2-4)/4}^{2-y} dx = \int\limits_{-6}^{2}\left(x \,\Bigg|_{(y^2-4)/4}^{2-y} \right) dy = \int\limits_{-6}^{2}\left(2 - y - \frac{y^2-4}{4}\right)dy = \int\limits_{-6}^{2}\left(3 - y - \frac{y^2}{4}\right)dy =$$

$$\left(3y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{12}y^3\right)\Bigg|_{-6}^{2} = \frac{64}{3}\ \text{(кв.од.)}.$$

11. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $(x^2+y^2)^2=a^2(4x^2+y^2)$, де $a>0$.

Розв'язання. Очевидно, що задана крива є симетричною відносно осі Ox, осі Oy та початку координат. Перейдемо до полярних координат:

$$r^4=a^2r^2\left(4\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right),\ r^2=a^2\left(3\cos^2\varphi+1\right) \text{ або } r=a\sqrt{3\cos^2\varphi+1}.$$

Графік кривої подано на рисунку 29,*б*.

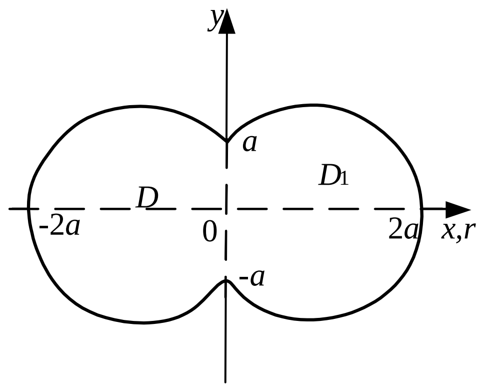


Рис.29б

В силу симетрії, вся площа заданої фігури $S=4S_1$, де $S_1=S(D_1)$, $D_1=\{(r,\varphi)$: $0\le\varphi\le\pi/2,\ 0\le r\le a\sqrt{3\cos^2\varphi+1}\}$. Отже,

$$S(D)=4\iint\limits_{D_1}dxdy=4\iint\limits_{D_1}rdrd\varphi=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{3\cos^2\phi+1}}rdr=$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{3\cos^2\phi+1}}d\varphi=2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos^2\varphi+1\right)d\varphi=2a^2\cdot3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi+2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi==3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos2\varphi\right)d\varphi+$$

$$+2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=5a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi+3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2\varphi d\varphi=5a^2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{3a^2}{2}\sin2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5}{2}\pi\,a^2\ \text{(кв.од.)}.$$

Перш ніж перейти до розв'язання прикладів на знаходження об'ємів, зауважимо, що при обчисленні об'єму будь-якого тіла корисно зробити просторовий рисунок, який давав би уявлення про форму даного тіла. Якщо ж побудова такого рисунка є складною, то можна обмежитися зображенням області інтегрування на площині Oxy. Однак і в цьому випадку необхідно уявляти собі, хоча б у самих загальних обрисах, те тіло, об'єм якого знаходимо.

12. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом обертання $z=x^2+y^2$, координатними площинами і площиною $x+y=1$.

Розв’язання. Поверхня параболоїда обертання $z=x^2+y^2$ утворюється обертанням навколо осі Oz параболи $z=x^2$. Рівняння $x+y=1$ у просторі визначає площину, паралельну вісі Oz, перерізом якої з площиною Oxy є пряма $x+y=1$. Тіло, об’єм якого необхідно обчислити, зображено на рисунку 30,*а*, зверху воно обмежене вгнутою поверхнею параболоїда $z=x^2+y^2$, знизу – площиною Oxy, спереду – площиною $x+y=1$, зліва – площиною Oxz ($y=0$), ззаду – площиною Oyz ($x=0$). Дане тіло можна вважати циліндричним, отже для обчислення його об’єму можна використати формулу $V=\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy$.

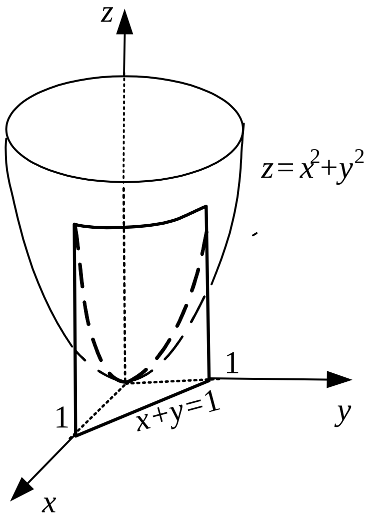


Рис.30 а

$V=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy$, де $D=\{(x,y)\colon 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$ – прямокутний трикутник.

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x^2+y^2\right)dy=\int_0^1\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=\int_0^1\left(x^2(1-x)+\frac{1}{3}(1-x)^3\right)dx=\frac{1}{6}\ \text{(куб.од.)}.$$

13. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $z=2-x-y$, $y=x^2$, $y=x$, $z=0$.

Розв’язання. Поверхня $y=x^2$ – є параболічним циліндром з твірними, паралельними осі Oz, і напрямною параболою $y=x^2$ у площині Oxy. Похила площина $z = 2 - x - y$ відтинає на осях координат рівні відрізки (по дві одиниці довжини). Площина $y=x$ проходить через вісь Oz і пряму $y=x$ у площині Oxy, $z=0$ – рівняння площини Oxy. Тіло, обмежене цими поверхнями, зображене на рисунку 30 *б*).

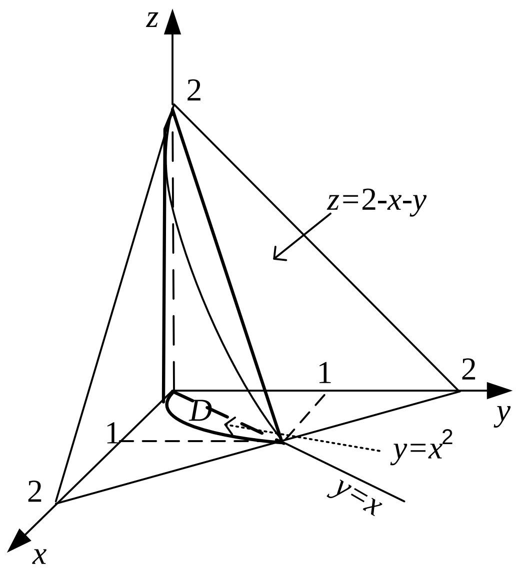


Рис.30б

Дане тіло циліндричне, воно обмежене поверхнею $z=2-x-y$, отже його об’єм знайдемо як

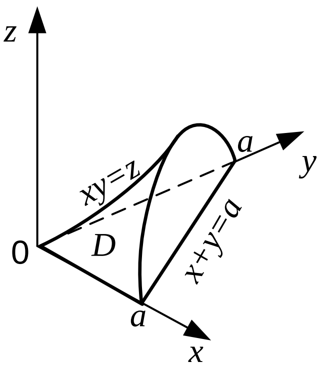
$V = \iint\limits_D (2-x-y)dxdy$, де $D = \{(x,y)\colon 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$.

$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (2-x-y)dy = \int_0^1 \left(2y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(2x - \frac{7}{2}x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right) dx = \frac{11}{60} \text{(куб.од.)}$$

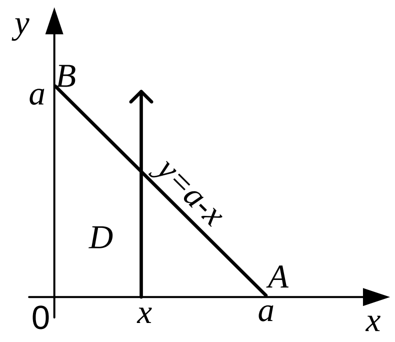
Ми пропонуємо самостійно з’ясувати, чому саме так визначені межі інтегрування у внутрішньому і зовнішньому інтегралах.

14. Обчислити об’єм тіла, обмеженого гіперболічним параболоїдом $z=xy$ і площинами $x + y = a$, $z=0$.

Розв’язання. Задане тіло зображене на рисунку 31 *а*), на рисунку 31 *б*) подана проекція цього тіла на площину *Oxy*.



а)



б)

Рис.31