Категорія М

Задача 1

Обчислити A^{200}, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Розглянемо матрицю $B = A - E$, де E – одинична матриця. Маємо

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$A^{200} = (E + B)^{200} = E + 200B + \frac{200 \cdot 199}{2} B^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 200 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 19900 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -200 & 200 \\ -200 & 19901 & -19900 \\ -200 & 19900 & -19899 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A = \begin{pmatrix} 1 & -200 & 200 \\ -200 & 19901 & -19900 \\ -200 & 19900 & -19899 \end{pmatrix}$.

Категорія М

Задача 2

Знайти:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\cos\cos\ldots\cos x}_{n}.$$

Розв'язання

Нехай $x_0 = x$, $\cos x_0 = x_1$, $\cos x_1 = x_2$, $\ldots \underbrace{\cos\ldots\cos x_0}_{n} = x_n$, тобто $x_n = cosx_{n-1}$.

Зрозуміло, що починаючи з $n = 2$, всі $x_n \in [0,\ 1]$ і на цьому проміжку косинус спадає. Отже, при $x_n > x_{n-1}$ маємо $x_{n+1} < x_n$ та навпаки, тому відрізок з кінцями в точках x_{n-1} і x_n та відрізок з кінцями в точках x_{n+1} і x_n лежать з одного боку від точки x_n. При цьому $|x_{n+1} - x_n| = |\cos x_n - \cos x_{n-1}| = |\sin c| \cdot |x_n - x_{n-1}|$ (за формулою Лагранжа). Помітимо, що точка $c \in (x_{n-1},\ x_n)$, так що $|\sin c| < \sin 1$. Тоді $|x_{n+1} - x_n| < \alpha |x_n - x_{n-1}|$, де $\alpha = \sin 1 < 1$. Таким чином, при $n \geq 2$ відрізок з кінцями в точках x_n і x_{n+1} міститься у відрізку з кінцями в точках x_{n-1} і x_n, при чому його довжина прямує до нуля, бо

$$|x_{n+1} - x_n| < \alpha |x_n - x_{n-1}| < \cdots < \alpha^{n-2} |x_3 - x_2| \to 0, n \to \infty.$$

За принципом вкладених відрізків послідовність x_n збігається до деякого числа a. Переходимо до границі в рівності $x_n = \cos x_{n-1}$, отримуємо, що це число a є коренем рівняння $x = \cos x$. (Можна розв'язати графічно)

Категорія М

Задача 3

Обчислити $f''(1)$, якщо

$$f(x)=\frac{(4x^3-3x^2+1)sin^3\left(\sqrt{(x-1)^5}+\sqrt[3]{(2x^2-3x+1)^7}\right)}{2x^3+7x^2+5}.$$

Розв'язання

Нехай

$$u(x)=\frac{4x^3-3x^2+1}{2x^3+7x^2+5},\qquad v(x)=sin\left(\sqrt{(x-1)^5}+\sqrt[3]{(2x^2-3x+1)^7}\right).$$

Тоді маємо:

$$f(x)=u(x)v^3(x),$$

$$f'(x)=u'(x)v^3(x)+3u(x)v^2(x)v'(x)=v^2(x)g(x),$$

де

$$g(x)=u'(x)v(x)+3u(x)v'(x).$$

Отже,

$$f''(x)=2v(x)v'(x)g(x)+v^2(x)g'(x)=v(x)\big(2v'(x)g(x)+v(x)g'(x)\big).$$

Оскільки $v(1)=0$, то $f''(1)=0$.

Відповідь: $f''(1)=0$.

Категорія М

Задача 4

Нехай рівняння $t^5 + t = x$, де $x \geq 0$, має розв'язок $t = g(x)$. Довести, що інтеграл $\int_0^2 g(x)dx$ існує і знайти його.

Розв'язання

а) Так як функція $x = t^5 + t$ неперервна і зростає, то неперервна й обернена до неї $t = g(x)$ неперервна. Тому інтеграл існує і дорівнює площі під графіком функції $g(x)$.

б) $\int_0^2 g(x)dx = 2 - \int_0^1 (t^5 + t)dt = 2 - \left(\frac{t^6}{6} + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$.

Категорія М

Задача 5

В просторі задано точки $A\left(1,\ 1,\ 1\right)$; $B\left(3,\ -3,\ 3\right)$; $C\left(6,\ -1,\ 0\right)$; $D\left(7,\ 1,\ -2\right)$. Довести, що чотирикутник $ABCD$ – плоский, невироджений і опуклий.

Розв'язання

Розкладемо вектор $\overrightarrow{AC}$ за векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.$$

а) З існування такого розкладу випливає, що вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ лежать в одній площині, тому чотирикутник $ABCD$ плоский.

б) Коефіцієнти цього розкладу більше 0, так що точка C лежить всередині кута BAD.

в) Сума коефіцієнтів більше 1, так що C знаходиться поза трикутником ABD, що і потрібно було довести.

Категорія М

Задача 6

Нехай $f(x)$ неперервна на $[0,\ 1]$, $f(0) = f(1)$ та $f(x) \neq 0$. Довести, що існує хорда графіка $y = f(x)$ довжиною $1/5$, паралельна осі *OX*.

Розв'язання

Треба довести, що для деякого $x \in \left[0,\ \frac{4}{5}\right]$ виконується рівність $f(x) = f\left(x + \frac{1}{5}\right)$. Таке x є нулем функції $g(x) = f\left(x + \frac{1}{5}\right) - f(x)$.

Маємо:

$$g(0) + g\left(\frac{1}{5}\right) + g\left(\frac{2}{5}\right) + g\left(\frac{3}{5}\right) + g\left(\frac{4}{5}\right) = f(1) - f(0) = 0.$$

Якщо хоч один з доданків лівої частини рівний нулю, то твердження доведено. Якщо жоден з цих доданків не рівний нулю, то існує пара сусідніх доданків різного знаку. В силу того, що $g(x)$ – неперервна, в деякій точці вона перетворюється в нуль.

Задача 7

Нехай $y = f(x)$ є розв'язком рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}.$$

Яке з двох наступних тверджень правильне:

а) якщо $f(x) > 0 \; \forall \; x \in R$, то і $f'(x) > 0 \; \forall \; x \in R$;

б) якщо $f'(x) > 0 \; \forall \; x \in R$, то $f(x)$ також більше нуля $\forall \; x \in R$.

Розв'язання

Правильним є друге твердження. Відповідь отримана з порівняння квадратних тричленів, що містяться в розв'язку $y(x)$ та його похідній $y'(x)$.

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = f(x) = Axe^{2x} + Be^{2x} + 2x^2e^{2x} = g(x)e^{2x},$$

де $g(x) = 2x^2 + Ax + B,\; A, B$ – довільні сталі.

Тому $y' = f'(x) = h(x)e^{2x}$, де $h(x) = 4x^2 + 2(A+2)x + A + 2B$.

Умова $f(x) > 0 \; \forall \; x \in R$ рівносильна умові $g(x) > 0 \; \forall \; x \in R$, яка рівносильна нерівності $D = A^2 - 8B < 0$, тобто $B > \frac{1}{8}A^2$.

Умова $f'(x) > 0 \; \forall \; x \in R$ рівносильна умові $h(x) > 0 \; \forall \; x \in R$, яка рівносильна нерівності $D_1 = 4(A+2)^2 - 16(A+2B) = 4A^2 + 16 - 32B < 0$, тобто $B > \frac{1}{8}A^2 + \frac{1}{2}$. Ясно, що з нерівності $B > \frac{1}{8}A^2 + \frac{1}{2}$ випливає нерівність $B > \frac{1}{8}A^2$, але не навпаки, тому друге твердження правильне, а перше – хибне.