Криволінійні інтеграли

Криволінійний інтеграл першого роду (по довжині дуги)

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x;y;z)\,dl = \lim_{\max\Delta li\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\cdot\Delta li$$

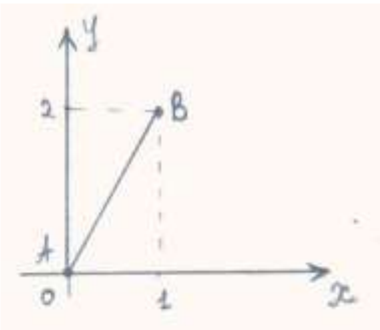
Приклад 1. Обчислити $Y\& = \int\limits_{L}\frac{dl}{x+2y+5}$, де L - відрізок прямої $y = 2x-2$, що знаходиться між точками $A(0;-2)$, $B(1;0)$

Знаходимо $dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+2^2}dx = \sqrt{5}dx$. Значить

$$Y\& = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{x+2(2x-2)+5} = \sqrt{5}\int\limits_0^1\frac{dx}{5x+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln|5x+1|\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(\ln(6)-\ln 1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln 6$$

Приклад для с.р. $\int\limits_{L}\frac{dl}{kx+y+(2k-1)}$, де L - відрізок прямої $y = x+1$, що знаходиться між точками $A(0;1)$, $B(1;2)$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_{L} xdl$, де L - відрізок прямої, що з'єднує точками $A(0;0)$, $B(1;2)$



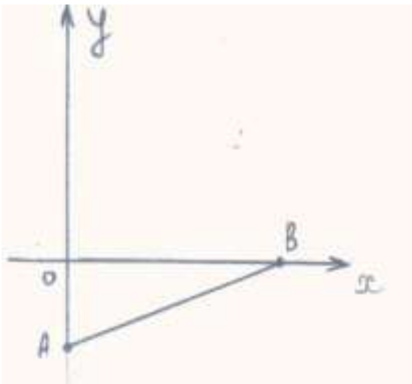
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1},\ \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{2-0},\ \frac{x}{1} = \frac{y}{2},\ y = 2x$$

Знаходимо $dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+2^2}dx = \sqrt{5}dx$. Значить

$$Y\& = \int\limits_0^1 x\sqrt{5}dx = \sqrt{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Приклад для с.р. $\int\limits_{L} kxdl$, де L - відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;0)$, $B(\mathrm{k};\mathrm{k}+1)$

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де L - відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;-2)$, $B(4;0)$



$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\ \frac{x-0}{4-0}=\frac{y+2}{0+2},\ \frac{x}{4}=\frac{y+2}{2},$$

$$2x=4y+8,\ 4y=2x-8,\ y=\frac{1}{2}x-2$$

Знаходимо $dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+\frac{1}{4}}dx=\frac{\sqrt{5}}{2}dx$. Значить

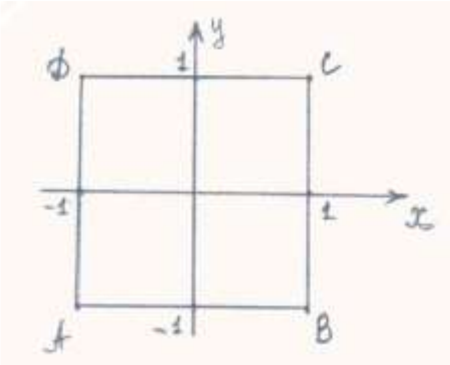
$$I=\int_0^4\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}dl}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}x^2-2x+4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}x^2-2x+4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}\left(x^2-\frac{8}{5}x+\frac{16}{5}\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{64}{25}}}=\ln\left|\left(x-\frac{4}{5}\right)+x\sqrt{{}^2-\frac{8}{5}x+\frac{16}{5}}\right|\Big|_0^1=\ln\left|\left(x-\frac{4}{5}\right)+x\sqrt{{}^2-\frac{8}{5}x+\frac{16}{5}}\right|-$$

$$-\ln\left|-\frac{4}{5}+\sqrt{\frac{16}{5}}\right|=\ln\left|\frac{16}{5}+\frac{8}{\sqrt{5}}\right|-\ln\left|\frac{4}{\sqrt{5}}-\frac{4}{5}\right|$$

Приклад для с.р. $\int\limits_{L_{AB}}\frac{dl}{\sqrt{kx^2+y^2}}$, де L_{AB} - відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;0)$, $B(\mathrm{k};-\mathrm{k})$

Приклад 4. Обчислити $\int\limits_L xydl$, де L - контур квадрата зі сторонами $x = \pm 1,\ y = \pm 1$



AB: $y = -1,\ dl = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1+0}dx = dx$

$$\int\limits_{-1}^{1} x(-1)dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}(1-1) = 0$$

BC: $x = 1,\ dl = \sqrt{1 + x'^2}dy = \sqrt{1+0}dy = dy$

$$\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot ydy = \frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

DC: $y = 1,\ dl = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1+0}dx = dx$

$$\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

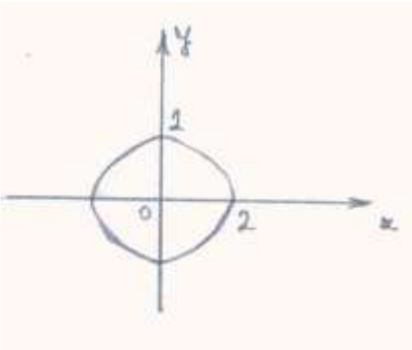
DA: $x = -1,\ dl = \sqrt{1 + x'^2}dy = \sqrt{1+0}dy = dy$

$$\int\limits_{-1}^{1} -ydy = -\frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}(1-1) = 0$$

$$Y\& = \int\limits_L xydl = \oint\limits_{L_{AB}} xydy + \int\limits_{L_{BC}} xydy + \int\limits_{L_{DC}} xydy + \int\limits_{L_{DA}} xydy = 0+0+0+0 = 0$$

Приклад для с.р. Обчислити $\int\limits_{L_{OABC}} xydl$, де L_{OABC} - контур прямокутника з вершинами $O(0;0),\ A(k;0),\ B(k;k+2),\ C(0;k+2)$

Приклад 5. Обчислити $\oint\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, де L - коло $x^2+y^2=4$



Перейдемо до полярних координат: $x^2+y^2=r^2$, $r^2=4$, $r=2$

$dl=\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi=\sqrt{4+0}d\varphi=2d\varphi$

Значить, $I=\int\limits_0^{2\pi} 4\cdot 2\cdot d\varphi = 8\varphi\Big|_0^{2\pi}=8\left(2\pi-0\right)=16\pi$

Приклад для с.р. Обчислити $\oint\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, де L - коло $x^2+y^2=k^2$

Приклад для с.р. Обчислити $\oint\limits_{L_{ABO}} \left(x+y\right)dl$, де L_{ABO} - контур трикутника $A\left(k;0\right)$, $B\left(0;k\right)$, $O\left(0;0\right)$

Приклад 6. Обчислити $\int\limits_L \frac{z^2dl}{x^2+y^2}$, де L - перший виток гвинтової лінії $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=2t$.

Працюємо з лінією, що задана параметрично: $dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}dt$. Тоді $\begin{matrix} x_t'=-2\sin t \\ y_t'=2\cos t \\ z_t'=2 \end{matrix}$

$dl=\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t+4}dt=\sqrt{8}dt$

Значить,

$$Y\& = \int_0^{2\pi} \frac{4t^2 \cdot \sqrt{8}dt}{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \frac{4\sqrt{8}}{4}\int_0^{2\pi} t^2 dt = 2\sqrt{2}\cdot \frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left((2\pi)^3 - 0\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 8\pi^3 = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi^3$$

Приклад для с.р. Обчислити $\int\limits_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, де L - перший виток гвинтової лінії $x = k\cos t$, $y = k\sin t$, $z = kt$.

Приклад для 7. Обчислити $\int\limits_L xdl$, де L - дуга кривої $r = \sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/4$

У полярних координатах $dl = \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}d\varphi = d\varphi$

$x = r\cos\varphi = \sin\varphi \cdot \cos\varphi$

Значить,

$$Y\& = \int_0^{\pi/4} \sin\varphi \cdot \cos 2\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\cos 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{1}{4}\left(\cos 2\cdot\frac{\pi}{4} - \cos 0\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -\frac{1}{4}(0-1) = \frac{1}{4}$$

Приклад для с.р. Обчислити $\int\limits_L kydl$, L - дуга кривої $r = (k+1)\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Криволінійний інтеграл II роду (по координатах)

Якщо у просторі R^3 задано вектор $\vec{a} = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$, координати якого неперервні функції у точках орієнтованої кривої L_{AB}.
Криволінійним інтегралом другого роду (або по координатах) від вектор-функції $\vec{a}(x;y;z)$ по кривій L_{AB} називається:

$$\int\limits_{L_{AB}} \vec{a}(x;y;z)\,\overrightarrow{dl} = \int\limits_{L_{AB}} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$$

Приклад 1. Обчислити $\dot{Y} = \int\limits_{L_{AB}} ydx + (x+z)dy + (x-y)dz$, де L_{AB} - відрізок прямої, що з’єднує точки $A(1;-1;1)$, $B(2;3;4)$

Запишемо параметричні рівняння прямої АВ: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1} = t$,

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y+1}{3+1} = \frac{z-1}{4-1} = t, \quad \begin{matrix} \dfrac{x-1}{1} = t \\ \dfrac{y+1}{4} = t \\ \dfrac{z-1}{3} = t \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x-1 = t \\ y+1 = 4t \\ z-1 = 3t \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = t+1 & dx = dt \\ y = 4t-1, & dy = 4dt \\ z = 3t+1 & dz = 3dt \end{matrix}$$

На відрізку АВ параметр t змінюється [0;1]:

$$\left[\begin{matrix} x_1 = 1 & x = t+1 & 1 = t+1 & t_1 = 0 \\ x_2 = 2 & x = t+1 & 2 = t+1 & t_2 = 1 \end{matrix}\right]$$

Значить,

$$\dot{Y} = \int\limits_0^1 (4t-1)dt + ((t+1)+(3t+1))4dt + (t+1-(4t-1))3dt = \int\limits_0^1 (4t-1+(4t+2)4+(2-3t)3)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (4t-1+16t+8+6-9t)dt = \int\limits_0^1 (11t+13)dt = \left(\frac{11t^2}{2} + 13t\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{11}{2}\cdot 1 + 13\cdot 1\right) = 13 + 5.5 = 18.5$$

Приклад для с.р. Обчислити $\dot{Y} = \int\limits_{L_{AB}} ydx + (x+z)dy + (x-y)dz$, де L_{AB} - відрізок прямої, що з’єднує точки $A(0;0;0)$, $B(k;-k;k)$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_{L_{AB}} (x-y)dx + (x+y)dy$, де L_{AB} - відрізок прямої, що з’єднує точки $A(2;3)$, $B(3;5)$

Запишемо рівняння прямої: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \frac{x-2}{3-2}=\frac{y-3}{5-3} \Rightarrow \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}$

, $\begin{matrix} y-3=2x-4 \\ y=2x-1 \end{matrix} \Rightarrow \quad dy=2dx$

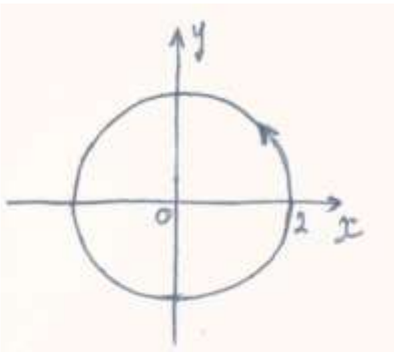
Тоді:

$$Y\& = \int_2^3 \left(\left(x-(2x-1)\right)dx+(x+2x-1)2dx\right)=\int_2^3(-x+1+6x-2)dx=\int_2^3(5x-1)dx=\left(5\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_2^3=$$

$$=\left(\frac{5}{2}\cdot 9-3\right)-\left(\frac{5}{2}\cdot 4-2\right)=\frac{45}{2}-3-\frac{20}{2}+2=\frac{25}{2}-1=\frac{23}{2}$$

Приклад для с.р. Обчислити $\int\limits_{L_{AB}}(x-y)dx+(x+y)dy$, якщо L_{AB} - відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;0)$, $B(k;k+1)$

Приклад 3. Обчислити $\oint\limits_L (x+2y)dx+(x-y)dy$, де L - коло $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ при додатному напрямку обходу.



$dx=-2\sin t dt$

$dy=2\cos t dt$

$t\in[0;2\pi]$

Значить,

$$Y\& = \int_0^{2\pi} \left(\left(2\cos t + 4\sin t \right)\left(-2\sin t \right)dt + \left(2\cos t - 2\sin t \right)2\cos t dt \right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-4\cos t \cdot \sin t - 8\sin^2 t + 4\cos^2 t - 4\sin t \cos t \right)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-8\cos t \sin t - 8\sin^2 t + 4\cos^2 t \right)dt = \int_0^{2\pi} \left(-4\sin 2t - 8\frac{1-\cos 2t}{2} + 4\frac{1+\cos 2t}{2} \right)dt =$$

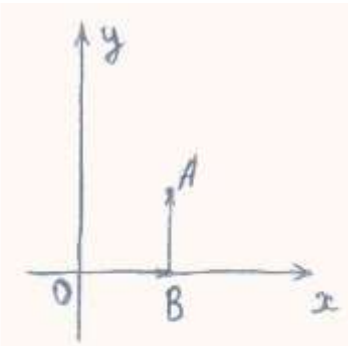
$$= \int_0^{2\pi} \left(-4\sin 2t - 4\left(1 - \cos 2t\right) + 2\left(1 + \cos 2t\right) \right)dt = \int_0^{2\pi} \left(-4\sin 2t - 2 + 6\cos 2t \right)dt =$$

$$= \left(4 \cdot \frac{1}{2}\cos 2t - 2t + 6 \cdot \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{2\pi} = \left(2\cos 4\pi - 4\pi + 3\sin 4\pi \right) - \left(2\cos 0 - 0 + 0 \right) =$$

$$= \left(2 \cdot 1 - 4\pi + 0 \right) - 2 = -4\pi$$

Приклад для с.р. Обчислити $\oint_L ydx + xdy$, де L - коло $x = k\cos t$, $y = k\sin t$ при додатному напрямку обходу.

Приклад 4. Обчислити $\int_{L_{OBA}} 2xydx - x^2dy$, де L_{OBA} - ламана OBA: $O(0;0)$, $B(2;0)$, $A(2;1)$



OB: $y = 0$, $dy = 0$, $x \in [2;0]$

$$Y_1 = \int_0^2 2 \cdot x \cdot 0 \cdot dx - x^2 \cdot 0 = 0$$

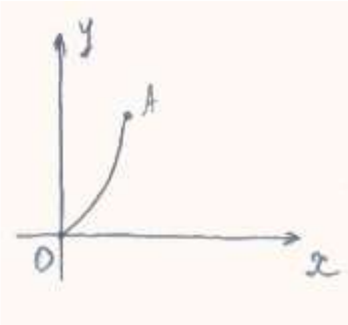
BA: $x = 2$, $dx = 0$, $y \in [0;1]$

$$Y_2 = \int_0^1 \left(2 \cdot 2 \cdot y \cdot 0 - 4 \cdot dy \right) = \int_0^1 \left(-4dy \right) = -4y\Big|_0^1 = -4 \cdot 1 = -4$$

Приклад для с.р. Обчислити $\int_{L_{OBA}} xdy - ydx$, де L_{OBA} - ламана OBA: $O(0;0)$, $B(k;0)$, $A(k;k+2)$

Приклад 5. Обчислити $\int\limits_{L_{OA}} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, де L_{OA} - дуга параболи $y = 2x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;2)$

$dy = 4xdx$



$$I = \int\limits_0^1 \left(x \cdot 2x^2 - 4x^4\right)dx + x \cdot 4xdx =$$

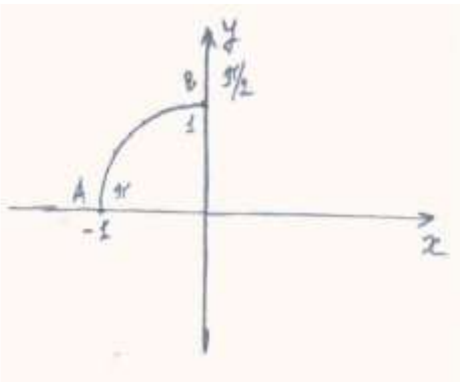
$$= \int\limits_0^1 \left(2x^3 - 4x^4 + 4x^2\right)dx =$$

$$= \left(2\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^5}{5} + 4\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{4}{3} = \frac{15 - 24 + 40}{30} = \frac{31}{30}$$

Приклад для с.р. Обчислити $\int\limits_{L_{OA}} \left(kxy - (k+1)y^2\right)dx + xdy$, де L_{OA} - дуга параболи $y = kx^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;\mathrm{k})$

Приклад 6. Обчислити $\int\limits_{L_{AB}} xdy$, де L_{AB} - дуга правого півкола $x^2 + y^2 = 1$ від точки $A(0;-1)$ до точки $B(0;1)$



$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \cdot \cos t \\ y = 1 \cdot \sin t \end{cases}$$

$dy = \cos t dt$

$$Y\& = \int_{\pi}^{\pi/2} \cos t \cdot \cos t dt = \int_{\pi}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_{\pi}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\pi/2} \left(1+\cos 2t\right) dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi}^{\pi/2} =$$

При

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \left(\pi + \frac{1}{2}\sin 2\pi\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = -\frac{\pi}{4}$$

клад для с.р. $\int\limits_{L_{AB}} ydx$, де L_{AB} - дуга верхнього півкола $x^2 + y^2 = k^2$ від точки $A(k;0)$ до точки $B(0;k)$

Приклад для с.р. $\oint\limits_{L} \left(x^2 - y\right) dx$, де L - контур прямокутника, утвореного прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = k$, $y = k + 1$ при додатному напрямку обходу.