Категорія C

1. Обчислити:

$$\int_{-3}^{3} \frac{dx}{1 + f(x) + \sqrt{1 + f^2(x)}}$$

якщо $f(x)$ – непарна функція.

Розв'язання

$$\int_{-3}^{3} \frac{dx}{1 + f(x) + \sqrt{1 + f^2(x)}} = \int_{-3}^{0} \frac{dx}{1 + f(x) + \sqrt{1 + f^2(x)}} + \int_{0}^{3} \frac{dx}{1 + f(x) + \sqrt{1 + f^2(x)}}$$

$$= \begin{Bmatrix} x = -t \\ dx = -dt \end{Bmatrix} = -\int_{3}^{0} \frac{dt}{1 - f(t) + \sqrt{1 + f^2(t)}} + \int_{0}^{3} \frac{dx}{1 + f(x) + \sqrt{1 + f^2(x)}}$$

$$= \int_{0}^{3} \left(\frac{1}{1 - f(x) + \sqrt{1 + f^2(x)}} + \frac{1}{1 + f(x) + \sqrt{1 + f^2(x)}} \right) dx$$

$$= \int_{0}^{3} \frac{2 + 2\sqrt{1 + f^2(x)}}{1 + 2\sqrt{1 + f^2(x)} + 1 + f^2(x) - f^2(x)} dx = \int_{0}^{3} \frac{2 + 2\sqrt{1 + f^2(x)}}{2 + 2\sqrt{1 + f^2(x)}} dx = x|_0^3$$

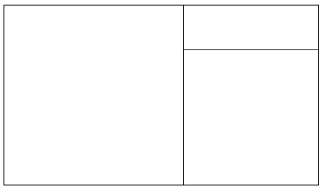
$$= 3$$

Відповідь: 3.

2. Знайти прямокутник найменшої площі S, в якому можна розмістити без накладання два квадрати загальною площею 1. Можна вважати, що сторони квадратів паралельні сторонам прямокутника.

Розв'язання

Нехай площі квадратів x та $1 - x$. Можна вважати, що $x \geq \frac{1}{2}$. Прямокутник найменшої площі, який вміщує обидва квадрати, має вигляд:



Його площа

$$S(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} + \sqrt{1 - x}\right) = x + \sqrt{x - x^2}$$

Задача зводиться до знаходження найбільшого значення функції $S(x)$ на проміжку $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$S'(x) = 1 + \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = 0 \leftrightarrow 2\sqrt{x - x^2} = 2x - 1$$

Розв'язуючи відповідне рівняння, знаходимо критичну точку функції $S(x)$:

$$x_0 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

Значення $S(x_0)$ зручно обчислити так:

$$S(x_0) = x_0 + \frac{2x_0 - 1}{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

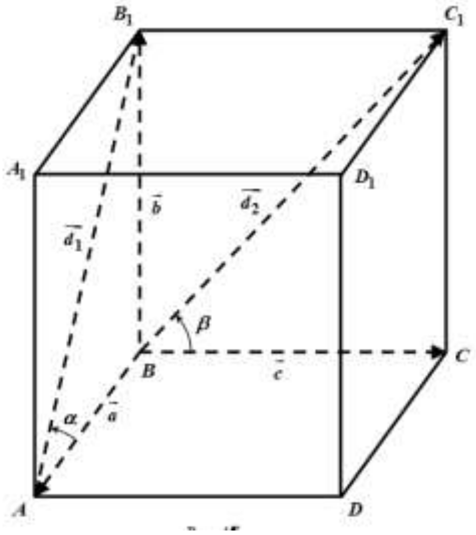
Помітивши, що $S\left(\frac{1}{2}\right) = S(1) = 1 < S(x_0)$, отримуємо $S(x) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь: $S(x) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

3. Мимобіжні діагоналі двох суміжних бічних граней прямокутного паралелепіпеда нахилені до площини його основи під кутами α і β відповідно. Знайти кут між цими діагоналями.

Розв'язання

Нехай $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ – збігаються з ребрами прямокутного паралелепіпеда, довжини яких відповідно дорівнюють a, b і c. Виразимо косинус кута **φ** між діагоналями, з якими збігаються вектори $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{BC_1}$, через a, b і c.



З рисунка видно, що

$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{d_1} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{d_2} = \vec{c} + \vec{b}.$

Оскільки вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ попарно перпендикулярні, то

$\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} + \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = b^2.$

З іншого боку

$\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2} = |\overrightarrow{d_1}| \cdot |\overrightarrow{d_2}| \cdot cos\varphi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + b^2} \cdot cos\varphi.$

Тоді

$cos\varphi = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c}{b}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\beta}} = sin\alpha \cdot sin\beta.$

Таким чином

$\varphi = arccos(sin\alpha \cdot sin\beta).$

Відповідь: $\varphi = arccos(sin\alpha \cdot sin\beta).$

4. Знайти максимум функції $f(x) = x^3 - 3x$ на множині $X = \{x \in R |\ x^4 + 36 \leq 13x^2\}$.

Розв'язання

$$x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$$
$$y^2 - 13y + 36 \leq 0$$
$$y_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2} = \{9,4\}$$

$x_{1,2} = \pm 3; x_{3,4} = \pm 2$

$$X \in [-3; -2] \cup [2; 3]$$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) > 0$ на X, тобто зростає.

Достатньо обчислити значення функції $f(x)$ в точках (-2), 3.

$f(-2) = -2; f(3) = 18$

Відповідь: $\max f(x) = 18.$

5. Обчислити $\lim_{n\to\infty}(n!\,e-[n!\,e])$, де $n\to\infty$. $[a]$- ціла частина числа.

Розв'язання

Так як $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta}x^{n+1}}{(n+1)!}, \theta\epsilon(0,1).$

$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^a}{(n+1)!}.$

Так як $0 < \frac{e^a}{(n+1)!} < 1$ для $n > 1$, то $[n!\,e] = n! + n! + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots .. 1$

$n!\,e - [n!\,e] = n!\frac{e^a}{(n+1)!} = \frac{e^a}{(n+1)!}.$

$\forall n > 1.$

Відповідь: 0

6. Елементи матриці 20-го порядку цілі числа і крайньою мірою 385 з них – непарні. Довести, що визначник цієї матриці – парне число.

Розв'язання

По крайней мере две строки нечетные вычесть и вычислить.

7. Нехай

$$f(x) = \begin{vmatrix} x^2+1 & (x-1)^2 & 2x+1 \\ 3x-1 & 3x+2 & x+4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x+1 & x^2 & 3x+1 \\ 3x-1 & (x+1)^2 & 4x \\ x^2+1 & x^2-1 & 2x+2 \end{vmatrix}$$

Довести, що існує точка $x_0 \in (0,1)$, у якій функція $f(x)$ має горизонтальну дотичну.

Розв'язання

$f(0) = f(1) = 0$. Далее теорема Ролля.