Категорія Т

Задача 1

Точка рухається по прямій так, що середня швидкість за будь-який проміжок часу дорівнює середньому арифметичному швидкостей на кінцях проміжку. Довести, що точка рухається з постійним прискоренням.

Розв'язання

$$\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}=\frac{x'(t)+x'(t_0)}{2};$$

$$x(t)=x(t_0)+(t-t_0)\frac{x'(t)+x'(t_0)}{2}.$$

Залишилося показати, що $x'''(t)=0$ і відповідно, прискорення $a=x''=const$.

Категорія Т

Задача 2

Через точку P, що лежить на графіку Г функції $y = x^3$, проведена дотична, яка перетинає Г в точці $Q \neq P$. Довести, що кутовий коефіцієнт дотичної до Г в точці Q в чотири рази більше кутового коефіцієнта дотичної в точці P.

Розв'язання

$$y = x^3; \qquad y' = 3x^2.$$

Через p позначимо абсцису т. P, а через q – абсцису т. Q. Врахуємо, що кутові коефіцієнти дотичної до Г в т. Q і т. P рівні відповідно $y'(q) = 3q^2$ та $y'(p) = 3p^2$, а отже, їх відношення рівне $\frac{y'(q)}{y'(p)} = \frac{q^2}{p^2}$. Нехай (X, Y) – координати довільної точки на дотичній до Г в т. Тоді

$$Y - p^3 = 3p^2(X - p).$$

Оскільки т. Q належить Г, то її координати (q, q^3). Оскільки т. Q належить дотичній до Г в т. P, то

$$q^3 - p^3 = 3p^2(q - p);$$
$$q^2 + pq + p^2 = 3p^2;$$

звідки

$$q^2 + pq - 2p^2 = 0;$$
$$\left(\frac{q}{p}\right)^2 + \frac{q}{p} - 2 = 0;$$

отже, $\frac{q}{p} = 1$ або $\frac{q}{p} = -2$. Оскільки $P \neq Q$, то $\frac{q}{p} \neq 1$, а отже, $\frac{q^2}{p^2} = 4$.

Категорія Т

Задача 3

В матриці розміру 10×19, яка складається з 0 та 1, знайшли суми чисел в кожному стовпчику і в кожному рядку. Яка найбільша кількість різних чисел може бути отримана?

Розв’язання

Зрозуміло, що вказані суми можуть приймати значення від 0 до 19, тобто всього 20 можливих значень.

Доведемо, що всі його 20 значень не можуть бути отримані.

Припустимо протилежне. Тоді в матриці є або нульовий стовпчик, або нульовий рядок. Перше неможливо, так як тоді сума чисел в будь-якому рядку не більше 18. В другому випадку сума чисел в будь-якому стовпчику не більше 9. Тому в рядках повинні отримуватися суми від 10 до 19, що неможливо, оскільки рядок нульовий. Отримали протиріччя. Отже, різних сум не більше 19.

Приклад матриці, який показує, що різних сум може бути 19:

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{matrix} 1\text{й} & 2\text{й} & \ldots & 8\text{й} & 9\text{й} & 10\text{й} & \ldots & 19\text{й} \end{matrix} & \sum \\
\begin{matrix} 1\text{й} \\ 2\text{й} \\ \ldots \\ 9\text{й} \\ 10\text{й} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 19 \\ 18 \\ \ldots \\ 11 \\ 10 \end{matrix} \\
\sum & \begin{matrix} 1 & 2 & \ldots & 8 & 9 & & & \end{matrix} &
\end{array}$$

У прикладі суми чисел у перших дев’яти стовпчиках рівні 1, 2, …, 9; суми чисел у рядках рівні 19, 18, …, 10.

Задача 4

Нехай $y = f(x)$ є розв'язком рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}.$$

Яке з двох наступних тверджень правильне:

а) якщо $f(x) > 0\ \forall\ x \in R$, то і $f'(x) > 0\ \forall\ x \in R$;

б) якщо $f'(x) > 0\ \forall\ x \in R$, то $f(x)$ також більше нуля $\forall\ x \in R$.

Розв'язання

Правильним є друге твердження. Відповідь отримана з порівняння квадратних тричленів, що містяться в розв'язку $y(x)$ та його похідній $y'(x)$.

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = f(x) = Axe^{2x} + Be^{2x} + 2x^2e^{2x} = g(x)e^{2x},$$

де $g(x) = 2x^2 + Ax + B,\ \ A, B$ – довільні сталі.

Тому $y' = f'(x) = h(x)e^{2x}$, де $h(x) = 4x^2 + 2(A+2)x + A + 2B$.

Умова $f(x) > 0\ \forall\ x \in R$ рівносильна умові $g(x) > 0\ \forall\ x \in R$, яка рівносильна нерівності $D = A^2 - 8B < 0$, тобто $B > \frac{1}{8}A^2$.

Умова $f'(x) > 0\ \forall\ x \in R$ рівносильна умові $h(x) > 0\ \forall\ x \in R$, яка рівносильна нерівності $D_1 = 4(A+2)^2 - 16(A+2B) = 4A^2 + 16 - 32B < 0$, тобто $B > \frac{1}{8}A^2 + \frac{1}{2}$. Ясно, що з нерівності $B > \frac{1}{8}A^2 + \frac{1}{2}$ випливає нерівність $B > \frac{1}{8}A^2$, але не навпаки, тому друге твердження правильне, а перше – хибне.

Категорія Т

Задача 5

Знайти всі функції f, неперервні на $[0,\ +\infty)$, для яких

$$\sin\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{x}{x+1}.$$

Розв'язання

Нехай $\int_0^x f(t)dt = F(x)$; $\sin F = \frac{x}{x+1}$.

$$\frac{x}{x+1} \in [-1,\ 1] \Rightarrow -1 \le \frac{x}{x+1} \le 1.$$

$$\left.\begin{array}{c} -x-1 \le x \\ x \le x+1 \end{array}\right\} \to x \ge -\frac{1}{2};$$

$$\Rightarrow F(x) = \arcsin\frac{x}{x+1} + 2\pi k;$$

$$F(x) = \pi - \arcsin\frac{x}{x+1} + 2\pi k.$$

Так як $F(0) = 0$, з неперервності функції F підходить тільки розв'язок

$$F(x) = \arcsin\frac{x}{x+1}.$$

Відповідь: $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$.

Категорія Т

Задача 6

На площині довільно задано 5 точок. Довести, що 4 з них розміщені в вершинах опуклого чотирикутника (який, можливо, вироджується в трикутник, відрізок або точку).

Розв'язання

Нехай *S* – межа опуклої оболонки заданих точок.

а) Якщо всі 5 точок розміщені на *S*, то або вони колінеарні, або будь-які чотири неколінеарні точки з 5 заданих розміщені в вершинах опуклого чотирикутника.

б) Якщо чотири з п'яти заданих точок лежать на *S*, то саме ці точки є вершинами опуклого чотирикутника.

в) Якщо на *S* лежить рівно три точки з п'яти заданих (*A*, *B*, *C*), то вони слугують вершинами трикутника *ABC*, всередині якого розміщено дві інші точки *D* та *E*. Пряма *DE* лежить всередині трикутника й проходить через внутрішні точки не більше ніж двох сторін трикутника *ABC*. Розглянемо третю сторону трикутника, жодна з внутрішніх точок якої не належить прямій *DE*. Нехай це сторона *BC*. Тоді маємо опуклий чотирикутник *BCDE*.

Категорія Т

Задача 7

Знайти $f^{(300)}(0)$, якшо

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)(1+x^3)(1+x^6)}.$$

Розв'язання

Домноживши чисельник і знаменник на $(1-x)$, отримаємо

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^{12}},$$

звідки при $|x| < 1$ маємо

$$\frac{1}{1-x^{12}} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{12k},$$

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^{12}} = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^{12k} =$$

$$= 1 - x + x^{12} - x^{13} + x^{24} - x^{25} + \cdots + x^{300} - x^{301} + \cdots.$$

Ряд Маклорена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

$$a_{300} = \frac{f^{(300)}(0)}{300!} = 1, \qquad f^{(300)}(0) = 300!$$

Відповідь: $f^{(300)}(0) = 300!$.