Категорія С

Задача 1

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = a_1, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \cdots + nx_1 = a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \cdots + nx_{n-1} = a_n. \end{cases}$$

Розв'язання

Додамо всі рівняння системи:

$$(1 + 2 + \cdots + n)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{2}{n^2+n}\sum_{i=1}^{n} a_i. \qquad (1)$$

Віднімемо з другого рівняння перше:

$$(n-1)\, x_1 - x_2 - \cdots - x_n = a_2 - a_1. \qquad (2)$$

Додамо рівняння (1) та (2) і отримаємо

$$x_1 = \frac{2}{n^3+n^2}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{a_2-a_1}{n}.$$

Аналогічно знаходимо інші невідомі:

$$x_k = \frac{2}{n^3+n^2}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{a_{k+1}-a_k}{n}, \qquad k = 1, \dots, n-1.$$

$$x_n = \frac{2}{n^3+n^2}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{a_1-a_n}{n}.$$

Категорія C

Задача 2

Обчислити інтеграл:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(tg\,x)^{\sqrt{3}}}.$$

Розв'язання

Маємо

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(tg\,x)^{\sqrt{3}}} = [t = \pi/2 - x] = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{dt}{1+(ctg\,t)^{\sqrt{3}}} = \int_0^{\pi/2} \frac{(tg\,t)^{\sqrt{3}}}{1+(tg\,t)^{\sqrt{3}}} dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(tg\,x)^{\sqrt{3}}}{1+(tg\,x)^{\sqrt{3}}} dx.$$

Звідси

$$I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(tg\,x)^{\sqrt{3}}} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{(tg\,x)^{\sqrt{3}}}{1+(tg\,x)^{\sqrt{3}}} dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4}$.

Категорія С

Задача 3

Через точку P, що лежить на графіку Г функції $y = x^3$, проведена дотична, яка перетинає Г в точці $Q \neq P$. Довести, що кутовий коефіцієнт дотичної до Г в точці Q в чотири рази більше кутового коефіцієнта дотичної в точці P.

Розв'язання

$$y = x^3; \qquad y' = 3x^2.$$

Через p позначимо абсцису т. P, а через q – абсцису т. Q. Врахуємо, що кутові коефіцієнти дотичної до Г в т. Q і т. P рівні відповідно $y'(q) = 3q^2$ та $y'(p) = 3p^2$, а отже, їх відношення рівне $\frac{y'(q)}{y'(p)} = \frac{q^2}{p^2}$. Нехай $(X,\, Y)$ – координати довільної точки на дотичній до Г в т. Тоді

$$Y - p^3 = 3p^2(X - p).$$

Оскільки т. Q належить Г, то її координати $(q,\, q^3)$. Оскільки т. Q належить дотичній до Г в т. P, то

$$q^3 - p^3 = 3p^2(q - p);$$
$$q^2 + pq + p^2 = 3p^2;$$

звідки

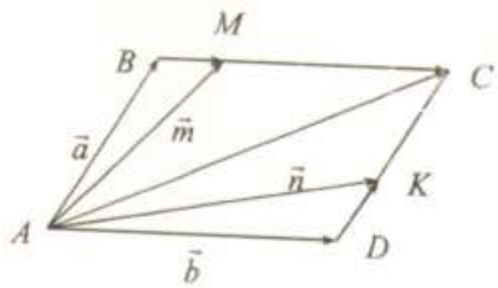
$$q^2 + pq - 2p^2 = 0;$$
$$\left(\frac{q}{p}\right)^2 + \frac{q}{p} - 2 = 0;$$

отже, $\frac{q}{p} = 1$ або $\frac{q}{p} = -2$. Оскільки $P \neq Q$, то $\frac{q}{p} \neq 1$, а отже, $\frac{q^2}{p^2} = 4$

Категорія С

Задача 4

Дано паралелограм $ABCD$. На стороні BC взято точку M так, що $BM: MC = 1:4$, а на стороні DC взято точку K так, що $DK: KC = 3:4$. Розкласти вектор $\overline{AC}$ на вектори $\overline{AM}$ та $\overline{AK}$.



Розв'язання

Позначимо $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AD} = \bar{b}$, $\overline{AM} = \bar{m}$, $\overline{AK} = \bar{n}$. Виразимо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ через $\bar{m}$ і $\bar{n}$ з системи:

$$\begin{cases} \bar{m} = \bar{a} + \dfrac{1}{5}\bar{b}, \\ \bar{n} = \bar{b} + \dfrac{3}{7}\bar{a}. \end{cases}$$

Звідси маємо $\bar{a} = \frac{35}{32}\bar{m} - \frac{7}{32}\bar{n}$, $\bar{b} = -\frac{15}{32}\bar{m} + \frac{35}{32}\bar{n}$. Підставивши отримані вирази в рівність $\overline{AC} = \bar{a} + \bar{b}$, маємо:

$$\overline{AC} = \frac{35}{32}\bar{m} - \frac{7}{32}\bar{n} - \frac{15}{32}\bar{m} + \frac{35}{32}\bar{n} = \frac{5}{8}\bar{m} + \frac{7}{8}\bar{n}.$$

Відповідь: $\overline{AC} = \frac{5}{8}\bar{m} + \frac{7}{8}\bar{n}$.

Категорія С

Задача 5

Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)$, якщо

$$f'(sin^2 2x) = sin^8 x + cos^8 x, \text{ а } f(0) = 0.$$

Розв'язання

Оскільки

$$sin^8 x + cos^8 x = (sin^4 x + cos^4 x)^2 - 2\, sin^4 x\, cos^4 x =$$

$$= ((sin^2 x + cos^2 x)^2 - 2sin^2 x cos^2 x)^2 - \frac{1}{8} sin^4 2x =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8} sin^4 2x = 1 - sin^2 2x + \frac{1}{4} sin^4 2x - \frac{1}{8} sin^4 2x =$$

$$= 1 - sin^2 2x + \frac{1}{8} sin^4 2x$$

то, позначивши через $t = sin^2 2x$, отримаємо $f'(t) = 1 - t + \frac{1}{8} t^2$.

Звідси знаходимо, що $f(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{24} + C$.

Відповідь: $f(0) = 0$ – найменше; $f(1) = \frac{13}{24}$ – найбільше.

Категорія С

Задача 6

Довести, що усі 6 доданків у розкладі визначника 3-го порядку (у вигляді алгебраїчної суми відповідних добутків) не можуть бути одночасно додатними.

Розв'язання

Нехай

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{31}$$

і всі доданки одночасно додатні. Тоді їх добуток теж додатний. Але він дорівнює числу $(-1)^3\left(\prod_{i,j=1}^{3} a_{ij}\right)^2 \leq 0$. Суперечність.

Категорія C

Задача 7

Пряма перетинає графік функції $y = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$ в чотирьох різних точках (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$. Знайти $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4$.

Розв'язання

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5; \end{cases}$$

$$kx + b = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$$

або

$$2x^4 + 7x^3 + (3 - k)x - (5 + b) = 0.$$

За теоремою Вієта сума коренів дорівнює $-7/2$, а їх середнє значення $-7/8$.

Відповідь: $-7/8$.