

Робочий зошит з теми: «Інтегральне числення»

Основні розділи:

- I. Невизначений інтеграл
- II. Визначений інтеграл
- III. Застосування визначеного інтеграла

Основні питання I розділу:

1. Означення невизначеного інтеграла
2. Властивості невизначеного інтеграла
3. Таблиця основних невизначених інтегралів
4. Основні методи інтегралів:
 - a) Метод безпосереднього інтегрування
 - b) Метод інтегрування підстановкою
 - c) Метод інтегрування частинами

Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, якщо для довільної $x \in (a;b)$ виконується рівність: _____

Множина усіх первісних функції $F(x) + C$ для функції $f(x)$ називається _____

і позначається _____

Основні властивості невизначеного інтеграла:

1. $\int af(x)dx =$ _____
2. $\int (f(x) \pm g(x))dx =$ _____
3. $\int f(kx + b)dx =$ _____

Таблиця основних інтегралів:

1. $\int x^\alpha dx =$ _____ $\alpha \neq -1$

2. $\int dx =$ _____

3. $\int \frac{dx}{x} =$ _____

4. $\int a^x dx =$ _____

5. $\int e^x dx =$ _____

6. $\int \sin x dx =$ _____

7. $\int \cos x dx =$ _____

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$ _____

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} =$ _____

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$ _____

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} =$ _____

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} =$ _____

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} =$ _____

Безпосереднє інтегрування.

Приклад 1. $\int \left(3x^2 - \frac{8}{x} + x^3 \right) dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \ln|x| + \frac{x^4}{4} + C = x^3 - 8 \ln|x| + \frac{1}{4} x^4 + C$

Приклад 1. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \left((5k + 1)x^{2k-3} - \frac{8k}{x^k} + x^{k-1} \right) dx$, k - номер студента в

аудиторному списку.

Приклад 2. $\int \sqrt[3]{1+3x} dx = \int (1+3x)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{4} \sqrt{(1+3x)^4} + C$

Приклад 2. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \sqrt[3k]{1+(2k+1)x} dx$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 3. Обчислити $\int \frac{dx}{6x+1} = \frac{1}{6} \ln|6x+1| + C$

Приклад 3. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{(8k-1)x-4}$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 4. Обчислити $\int \sin(9x+7) dx = -\frac{1}{9} \cos(9x+7) + C$

Приклад 4. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \cos((5k+3)x-3) dx$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 5. Обчислити $\int e^{6x-4} dx = \frac{1}{6} e^{6x-4} + C$

Приклад 5. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int e^{(1-3k)x+5} dx$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 6. Обчислити $\int \frac{dx}{9x^2 + 3} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{3}{9}} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{3}}} + C$

Приклад 6. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{(2k+3)x^2 + k}$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 7. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{4}{7}-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \arcsin \frac{x}{\sqrt{\frac{4}{7}}} + C$

Приклад 7. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{(3k+2)-(5k-1) \cdot x^2}}$, k - номер студента в аудиторному

списку

Приклад 8. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 2}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{x^2 + \frac{2}{9}}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{2}{9}}} = \frac{1}{3} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{2}{9}} \right| + C$

Приклад 8. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{(7k-2)x^2 - (3k+1)}}$, k - номер студента в аудиторному

списку

Приклад 9. Обчислити $\int \frac{dx}{3x^2 - 7} = \int \frac{dx}{3\left(x^2 - \frac{7}{3}\right)} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{7}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{7}{3}}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{\frac{7}{3}}}{x + \sqrt{\frac{7}{3}}} \right| + C$

Приклад 9. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{(2k+1)x^2 - (3k+2)}$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 10. Обчислити $\int \frac{1 + \cos 6x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 6x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{6} \sin 6x \right) + C$

Приклад 10. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \sin^2(4k-3)x dx$, k - номер студента в аудиторному списку

Метод інтегрування підстановкою

Приклад 1. Обчислити

$$\int \frac{xdx}{3x^2 + 8} = \begin{cases} 3x^2 + 8 = t \\ dt = 6xdx \\ xdx = \frac{1}{6} dt \end{cases} = \int \frac{\frac{1}{6} dt}{t} = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{6} \ln|t| + C = \frac{1}{6} \ln|3x^2 + 8| + C$$

Приклад 1. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{xdx}{(8k-5)x^2 + (k+1)}$, k - номер студента в аудиторному

списку.

Приклад 2. Обчислити

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}} = \left\{ \begin{array}{l} \ln(x+2) = t \\ dt = \frac{dx}{(x+2)} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln(x+2)} + C$$

Приклад 2. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{\sqrt{\ln^{2k+1}(kx+1)}}{kx+1} dx$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 3. Обчислити

$$\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos 3x = t \\ dt = -3 \sin 3x dx \\ \sin 3x dx = -\frac{1}{3} dt \end{array} \right\} = \int \frac{-\frac{1}{3} dt}{t^2} = -\frac{1}{3} \int t^{-2} dt = -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos 3x} + C$$

Приклад 3. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{\cos(4k-1) dx}{\sqrt{\sin^{k+1}(4k-1)}}$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 4. Обчислити

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^3}} = \int t^{-\frac{3}{2}} dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{t}} + C = -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + C$$

Приклад 4. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^{3k+1}(2k)x}}{\cos^2(2k)x} dx$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 5. Обчислити

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^3 x} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = t \\ dt = \frac{dx}{1+x^2} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2t^2} + C = \frac{1}{2\operatorname{arctg}^2 x} + C$$

Приклад 5. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^{(2k-1)} x}$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 6. Обчислити

$$\int e^{4-3x^2} x dx = \left\{ \begin{array}{l} 4-3x^2 = t \\ dt = -6x dx \\ x dx = -\frac{1}{6} dt \end{array} \right\} = \int e^t \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) dt = -\frac{1}{6} \int e^t dt = -\frac{1}{6} e^t + C = -\frac{1}{6} e^{4-3x^2} + C$$

Приклад 6. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int e^{5-2(7-6k)x^2} x dx$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 7. Обчислити $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} 1+\ln x = t \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\} = \int \sqrt{t} dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} + C$

Приклад 7. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{((2k-8) + \ln x)^{5k+1}}{x} dx$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 8. Обчислити

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x-7} = t \\ x-7 = t^2 \\ x = t^2 + 7 \\ dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{2tdt}{(t^2+7)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2+7} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x-7}}{\sqrt{7}} + C$$

Приклад 8. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+(5k-4)}}$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 9. Обчислити $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{3x}-5} = \left\{ \begin{array}{l} e^{3x}-5 = t \\ dt = 3e^{3x} dx \\ e^{3x} dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{3} dt}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + C = \frac{1}{3} \ln|e^{3x}-5| + C$

Приклад 9. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{e^{4k-3} dx}{e^{4k-3} + (6-7k)}$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 10. Обчислити

$$\int \frac{3x+10}{6x^2-4} dx = \int \frac{3xdx}{6x^2-4} + 10 \int \frac{dx}{6x^2-4} = 3 \int \frac{xdx}{6x^2-4} + \frac{10}{6} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{2}{3}} = \left\{ \begin{array}{l} 6x^2 - 4 = t \\ 12xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{12} dt \end{array} \right\} =$$

$$= 3 \int \frac{\frac{1}{12} dt}{t} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{\frac{2}{3}}}{x + \sqrt{\frac{2}{3}}} \right| + C = \frac{1}{4} \ln |t| + \frac{5}{6\sqrt{\frac{2}{3}}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{\frac{2}{3}}}{x + \sqrt{\frac{2}{3}}} \right| + C = \frac{1}{4} \ln |6x^2 - 4| + \frac{5}{6\sqrt{\frac{2}{3}}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{\frac{2}{3}}}{x + \sqrt{\frac{2}{3}}} \right| + C$$

Приклад 10. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{(3k-1)x+2k}{(k+1)x^2+(8k+6)}$, k - номер студента в аудиторному списку

Метод інтегрування частинами

Цей метод заснований на формулі: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Приклад 1. Обчислити

$$\int x \cdot e^{-2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = e^{-2x} dx \quad v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{array} \right\} = x \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - \int \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) dx = -\frac{1}{2} x \cdot e^{-2x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) + C$$

Приклад 1. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int x \cdot e^{3k+7} dx$, k - номер студента в аудиторному списку.

Приклад 2. Обчислити

$$\int \operatorname{arctg} 3x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} 3x \quad du = \frac{3dx}{1+9x^2} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right\} = x \cdot \operatorname{arctg} 3x - \int x \cdot \frac{3dx}{1+9x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} 3x - 3 \int \frac{xdx}{1+9x^2} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1+9x^2 = t \\ dt = 18xdx \\ xdx = \frac{1}{18} dt \end{array} \right\} = x \cdot \operatorname{arctg} 3x - 3 \int \frac{\frac{1}{18} dt}{t} = x \cdot \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t} = x \cdot \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6} \ln |t| + C =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6} \ln |1+9x^2| + C$$

Приклад 2. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \operatorname{arctg}(2k-1) dx$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 3.

Обчислити

$$\int \ln(2x+8) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(2x+8) \quad du = \frac{2dx}{2x+8} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right\} = x \ln(2x+8) - \int \frac{2dx}{2x+8} dx =$$

$$= x \ln(2x+8) - \int \frac{(2x+8)-8}{2x+8} dx = x \ln(2x+8) - \int \left(1 - \frac{8}{2x+8} \right) dx = x \ln(2x+8) - x + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln |2x+8| + C$$

Приклад 3. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \ln((3k-1)x+3) dx$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 4. Обчислити

$$\int \arcsin 8x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arcsin 8x \quad du = \frac{8dx}{\sqrt{1-64x^2}} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \arcsin 8x - 8 \int \frac{x \cdot 8 \cdot dx}{\sqrt{1-64x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} 1-64x^2 = t \\ dt = -128x dx \\ x dx = \frac{dt}{-128} \end{array} \right\} =$$

$$\frac{x^2}{2} \arcsin 8x - 8 \int \frac{-dt}{128 \cdot \sqrt{t}} = \frac{x^2}{2} \arcsin 8x + \frac{8}{128} \cdot 2\sqrt{t} + C = \frac{x^2}{2} \arcsin 8x - 8 \int \frac{-dt}{128 \cdot \sqrt{t}} = \frac{x^2}{2} \arcsin 8x + \frac{1}{8} \cdot \sqrt{1-64x^2} + C$$

Приклад 4. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \arcsin(2k-1)xdx$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 5. Обчислити

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} 2x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} 2x dx \quad du = \frac{2dx}{1+4x^2} \\ dv = x dx \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2dx}{1+4x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{x^2}{4x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \int \frac{x^2}{x^2+\frac{1}{4}} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \int \frac{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}}{x^2+\frac{1}{4}} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{\frac{1}{4}}{x^2+\frac{1}{4}}\right) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\frac{1}{2}}\right) + C = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{32} \operatorname{arctg} 2x + C$$

Приклад 5. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int x \arctan(3x+2)xdx$

Приклад 6. Обчислити

$$\int (x+8)\sin 3x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x+8 \quad du = dx \\ dv = \sin 3x dx \quad v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right\} = (x+8)\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \int \left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) dx =$$
$$= (x+8)\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\sin 3x + C$$

Приклад 6. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int (x + (5k - 3)) \cdot \sin(5k - 3)x dx$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 7. Обчислити

$$\int x \ln(3x+1) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(3x+1) \quad du = \frac{3dx}{3x+1} \\ dv = x dx \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln(3x+1) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{3dx}{3x+1} =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln(3x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{3x^2}{3x+1} dx = \frac{x^2}{2} \ln(3x+1) - \frac{1}{2} \int \left(x - \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}}{3x+1} \right) dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln(3x+1) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \ln|3x+1| \right) + C$$

Приклад 7. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int x \ln((3k - 2)x + 3) dx$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 8. Обчислити

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 4x} = \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 4x} \quad v = \frac{1}{4} x \cdot \operatorname{tg} 4x - \frac{1}{4} \end{array} \right\} = x \left(\frac{1}{4} \operatorname{tg} 4x \right) - \int \frac{1}{4} \operatorname{tg} 4x dx =$$

$$= \frac{1}{4} x \cdot \operatorname{tg} 4x - \frac{1}{4} \int \frac{\sin 4x}{\cos 4x} dx = \frac{1}{4} x \cdot \operatorname{tg} 4x + \frac{1}{4} \int \frac{1}{t} dt = \left\{ \begin{array}{l} \cos 4x = t \\ dt = -4 \sin 4x dx \\ \sin 4x dx = -\frac{1}{4} dt \end{array} \right\} = \frac{1}{4} x \cdot \operatorname{tg} 4x + \frac{1}{16} \ln |t| + C =$$

$$\frac{1}{4} x \cdot \operatorname{tg} 4x + \frac{1}{16} \ln |\cos 4x| + C$$

Приклад 8. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{x dx}{\cos^2(k+3)x}$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 9. Обчислити

$$\int (2x-1) \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2x-1 \quad du = 2dx \\ dv = e^x dx \quad v = e^x \end{array} \right\} = (2x-1)e^x - \int 2e^x dx = (2x-1)e^x - 2e^x + C$$

Приклад 9. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int ((5k-2)x+3)e^x dx$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 10. Обчислити

$$\int (x^2-1) \cos 2x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2-1 \quad du = 2x dx \\ dv = \cos 2x dx \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right\} = (x^2-1) \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x \cdot 2x dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \sin 2x dx \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right\} = (x^2 - 1) \frac{1}{2} \sin 2x - \left(-\frac{1}{2} \cos 2x - \int -\frac{1}{2} \cos 2x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 - 1) \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

Приклад 10. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int (x^2 - (2k - 5)) \cos(2k + 5) dx$, k - номер студента в аудиторному списку

Інтегрування деяких функцій

а) інтегрування функцій, що містять квадратний тричлен

Приклад 1. Обчислити

$$\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 8} = \int \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 8} =$$

$$= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{23}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{23}{4}}} + C$$

$$x^2 + bx + c = x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2}x + c =$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2}x + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$$

Приклад 1. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{x^2 + (2k - 5)x + (k - 11)}$, k - номер студента в аудиторному списку.

Приклад 2. Обчислити

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 - 3}} = \ln \left| (x-2) + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \right| + C$$

Приклад 2. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2kx - (3k - 15)}}$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 3. Обчислити

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-3)dx}{x^2 - 5x + 4} &= \int \frac{(x-3)dx}{x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 4} = \int \frac{(x-3)dx}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} = \begin{cases} x - \frac{5}{2} = t \\ dx = dt \\ x = t + \frac{5}{2} \end{cases} = \int \frac{t + \frac{5}{2} - 3}{t^2 - \frac{9}{4}} dt = \int \frac{t - \frac{1}{2}}{t^2 - \frac{9}{4}} dt = \\ &= \int \frac{t}{t^2 - \frac{9}{4}} dt - \int \frac{\frac{1}{2}}{t^2 - \frac{9}{4}} dt = \begin{cases} t^2 - \frac{9}{4} = z \\ dz = 2t dt \\ t dt = \frac{1}{2} dz \end{cases} = \int \frac{\frac{1}{2} dz}{z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{4}}} \ln \left| \frac{t - \frac{3}{2}}{t + \frac{3}{2}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| t^2 - \frac{9}{4} \right| - \frac{1}{6} \ln \left| \frac{t^2 - \frac{3}{2}}{t^2 + \frac{3}{2}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 5x + 4| - \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x - \frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{x - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 5x + 4| - \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-4}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

Приклад 3. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{(x + (k-1))dx}{x^2 + 2kx + (k-9)}$, k - номер студента в аудиторному списку

б) інтегрування раціональних функцій

Приклад 4. Обчислити

$$\int \frac{dx}{(5x-1)^7} = \int (5x-1)^{-7} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x-1)^{-6}}{-6} + C = -\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{(5x-1)^6} + C$$

Приклад 4. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{((7k-20)x+k)^{2k+5}}$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 5. Обчислити

$$\int \frac{(x-4)dx}{x^2-5x+6} = \left\{ \begin{array}{l} x^2-5x+6=0 \\ D=25-4 \cdot 6=25-24=1 \\ x_1=\frac{5+1}{2}=3; \quad x_2=\frac{5-1}{2}=2 \end{array} \right\} = \int \frac{(x-4)dx}{(x-3)(x-2)} = \int \frac{A}{x-3} dx + \int \frac{B}{x-2} dx.$$

$$\frac{x-4}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)};$$

Нехай $x=2$, тоді $A(2-2)+B(2-3)=2-4$; $-B=-2$; $B=2$

Нехай $x=3$, тоді $A(3-2)+B(3-3)=3-4$; $A=-1$

Маємо: $\int \frac{(x-4)dx}{x^2-5x+6} = \int \left(\frac{-1}{x-3} \right) dx + \int \frac{2}{x-2} dx = -\ln|x-3| + 2\ln|x-2| + C$

Приклад 5. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{x-k}{(x-2k)(x+k)} dx$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 6. Обчислити

$$\int \frac{x dx}{(x-1)(x^2+1)} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \right) dx$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+1)}$$

Нехай $x=1$, тоді $1 = A(1^2+1) + (1-1)(B \cdot 1 + C)$; $1 = 2A$; $A = \frac{1}{2}$

Нехай $x=0$, тоді $0 = \frac{1}{2}(0+1) + (0-1)(B \cdot 0 + C)$; $0 = \frac{1}{2} - C$; $C = \frac{1}{2}$

Нехай $x=-1$, тоді $-1 = \frac{1}{2}((-1)^2+1) + (-1-1)\left(-B + \frac{1}{2}\right)$;

$$-1 = 1 + 2B - 1; \quad 2B = -1; \quad B = -\frac{1}{2}$$

Маємо:

$$\int \frac{x dx}{(x-1)(x^2+1)} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \left(\int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt + \frac{1}{2} \arctg x + C = \begin{cases} x^2+1=t \\ dt=2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{cases} = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \arctg x + C$$

Приклад 6. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{(x-k) dx}{(x+k)(x^2+k)}$, k - номер студента в аудиторному списку

с) інтегрування деяких ірраціональних функцій

Приклад 7. Обчислити

$$\int \frac{dx}{3x - 4\sqrt{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{2tdt}{3t^2 - 4t} = 2 \int \frac{tdt}{t(3t - 4)} = 2 \int \frac{dt}{3t - 4} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \ln|3t - 4| + C$$

Приклад 7. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{(5k - 7) + 2k\sqrt{(3k + 1)x}}$, k - номер студента в аудиторному

списку

Приклад 8. Обчислити

$$\int \frac{4x dx}{\sqrt[3]{(3x - 8)^2 - 2\sqrt[3]{3x - 8}}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{3x - 8} = t \\ 3x + 8 = t^3 \\ 3dx = 3t^2 dt \\ dx = t^2 dt \\ x = \frac{t^3 + 8}{3} \end{array} \right\} = \int \frac{4 \cdot \frac{t^3 + 8}{3} \cdot t^2 \cdot dt}{t^2 - 2t + 4} = \frac{4}{3} \int \frac{(t^3 + 8)t^2 dt}{(t^2 - 2t + 4)} = \frac{4}{3} \int \frac{(t + 2)(t^2 - 2t + 4)t^2 dt}{t^2 - 2t + 4} =$$
$$= \frac{4}{3} \int (t^3 + 2t^2) dt = \frac{4}{3} \left(\frac{t^4}{4} + 2 \frac{t^3}{3} \right) + C = \frac{1}{3} \sqrt[3]{(3x - 8)^4} + \frac{8}{9} (3x - 8) + C$$

Приклад 8. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{(x - k) dx}{\sqrt{((k + 2)x - 1)x}}$, k - номер студента в аудиторному списку

Приклад 9. Обчислити

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} = \left\{ \begin{array}{l} x^{\frac{1}{3}}; \quad x^{\frac{1}{2}} \\ \text{Нек}(2,3) = 6 \\ \sqrt[6]{x} = t; \quad x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = \int \frac{6t^5 dt}{(\sqrt[6]{x})^2 + (\sqrt[6]{x})^3} = \int \frac{6t^5 dt}{t^2 + t^3} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^2(1+t)} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt =$$
$$= 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| + C \right) = 2\sqrt[6]{x^3} - 3\sqrt[6]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C$$

Приклад 9. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+k} + \sqrt{x+k}}$, k - номер студента в аудиторному списку

d) інтегрування тригонометричних функцій

Приклад 10. Обчислити

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \left| \begin{array}{l} \text{універсальна тригонометрична підстановка} \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$
$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2 + 2t + 1 - t^2} = 2 \int \frac{dt}{2t+2} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| + C$$

Приклад 10. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \frac{dx}{(2k-1)\sin x + (k+1)\cos x}$, k - номер студента в аудиторному

списку

Приклад 11. Обчислити

$$\int \sin 3x \cdot \cos 2x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{скористаємося формулою} \\ \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int (\sin(3x + 2x) + \sin(3x - 2x)) dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int (\sin 5x + \sin x) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} \cos 5x - \cos x \right) + C$$

Приклад 11. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \sin(2k-3)x \cdot \cos(2k)x dx$, k - номер студента в аудиторному

списку

Приклад 12. Обчислити

$$\int \sin^2 3x dx = \int \frac{1 - \cos 6x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 6x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{6} \sin 6x \right) + C$$

Приклад 12. (для самостійної роботи)

Обчислити $\int \sin^2(5k-1)x dx$, k - номер студента в аудиторному списку
