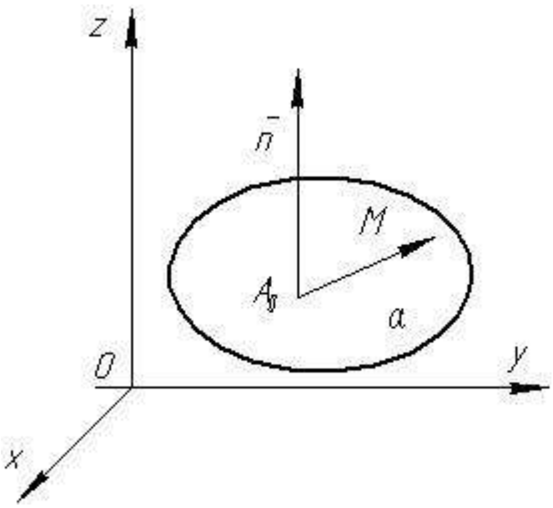
Лекція 5. Площина і пряма у просторі. Поверхні другого порядку

5.1 Рівняння площини у просторі.

5.1.1 Загальне рівняння площини.



Нехай задана площина α, $\vec{n}(A;B;C)$ - вектор, перпендикулярний (нормальний) до площини α, $M(x;y;z)$ - довільна точка площини, $A_0(x_0;y_0;z_0)$ - фіксована точка площини.

$\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{(x-x_0;\, y-y_0;\, z-z_0)}$

- рівняння площини, що має нормальний вектор.

- рівняння площини в загальному вигляді.

Дослідження:

1) $A=0$, $By+Cz+D=0$ - рівняння площини, паралельної осі Ох;

2) $B=0$, $Ax+Cz+D=0$ - рівняння площини, паралельної осі Оу;

3) $C=0$, $Ax+By+D=0$ - рівняння площини, паралельної осі Оz;

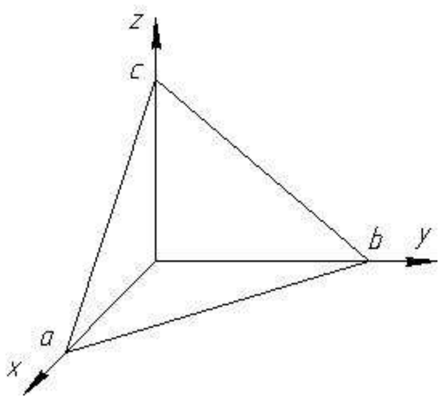
4) $D=0$, $Ax+By+Cz=0$ - рівняння площини, що проходить через початок системи координат;

5) $A=B=0$, $Cz+D=0$ - рівняння площини, паралельної площині ХОУ;

6) $A=C=0$, $By+D=0$ - рівняння площини, паралельно площині ХОZ;

7) $B=C=0$, $Ax+D=0$ - рівняння площини, паралельно площині УОZ;

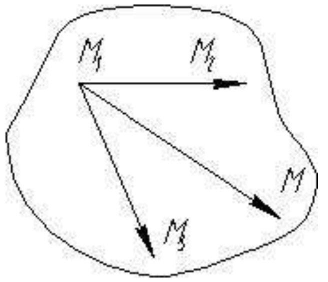
5.1.2 Рівняння площини у відрізках на осях.



$$Ax+By+Cz+D=0$$

- рівняння площини у відрізках на осях

5.1.3 Рівняння площини, що проходить через три точки.



Точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ - фіксовані точки площини, $M(x; y; z)$ - довільна точка площини.
З цих чотирьох точок утворимо три вектори
$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{(x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1)}$
$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)}$
$\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{(x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1)}$
Ці вектори лежать в одній площині, якщо їх змішаний добуток дорівнює нулю.
- рівняння площини, що проходить через три точки.

5.1.4 Взаємне розміщення двох площин.

Нехай дві площини α_1 і α_2 задані загальними рівняннями
$\alpha_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
$\alpha_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
Дві площини паралельні, якщо $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$
Дві площини перпендикулярні, якщо скалярний добуток їх нормальних векторів $\overrightarrow{n_1}(A_1; B_1; C_1)$, $\overrightarrow{n_2}(A_2; B_2; C_2)$ дорівнює нулю: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Кут між двома площинами знаходиться як кут між нормальними векторами цих площин $\cos\varphi = \dfrac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

5.2 Рівняння прямої у просторі.

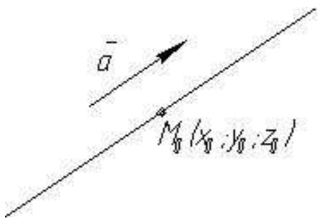
5.2.1 Загальне рівняння прямої у просторі.

Пряму можна задати як перетин двох площин:

(1)
Напрямний вектор прямої, заданої системою (1) обчислюється за формулою

$$\vec{a} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

5.2.2 Канонічне рівняння прямої.



Нехай $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - довільна точка прямої, $\vec{a}(k;l;m)$ - напрямний вектор прямої, координати якого обчислюються з системи (1) $k = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ $l = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$ $m = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$

- канонічне рівняння

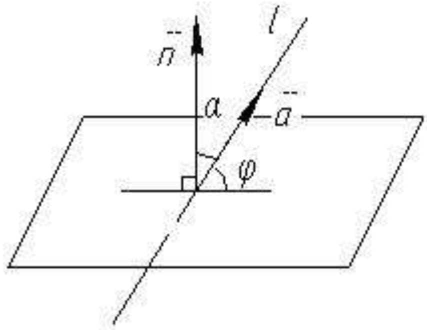
5.2.3 Параметричні рівняння прямої.

- **параметричні рівняння**, де $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - задана точка, що належить прямій, $\vec{a}(k;l;m)$ - напрямний вектор прямої.

5.2.4 Рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Якщо пряма проходить через дві точки у просторі $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то :

5.3 Кут між прямою і площиною.



Нехай φ - кут між прямою ℓ і площиною β, α - кут між нормальним вектором $\vec{n}(A;B;C)$ площини β і напрямним вектором $\vec{a}(k;l;m)$ прямої ℓ

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l} = \frac{z-z_0}{m}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ знаходять за формулою

Умова паралельності прямої $\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l} = \frac{z-z_0}{m}$ і площини $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$Ak + Bl + Cm = 0$$

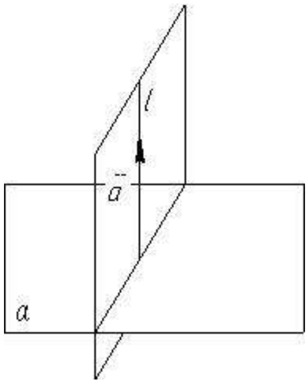
Умова перпендикулярності прямої $\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l} = \frac{z-z_0}{m}$ і площини $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\frac{A}{k} = \frac{B}{l} = \frac{C}{m}$$

5.4 Окремі випадки задання площини у просторі.

5.4.1 Рівняння площини, яка проходить через задану пряму, перпендикулярно до заданої площини.

Нехай пряма ℓ задана рівнянням $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}$, а площина α задана рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$ причому $\ell\perp\alpha$. Тоді рівняння має вигляд:



5.4.2 Рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі.

Дві паралельні прямі l_1 і l_2 задані відповідно рівняннями

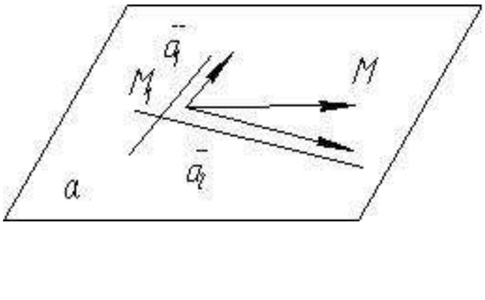
$l_1:\quad \frac{x-x_1}{k}=\frac{y-y_1}{l}=\frac{z-z_1}{m}\qquad l_2:\quad \frac{x-x_2}{k}=\frac{y-y_2}{l}=\frac{z-z_2}{m}$

- рівняння шуканої площини.

5.4.3 Рівняння площини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються.

Дві прямі, що перетинаються l_1 і l_2 задані відповідно рівняннями

$l_1:\quad \frac{x-x_1}{k_1}=\frac{y-y_1}{l_1}=\frac{z-z_1}{m_1}\qquad l_2:\quad \frac{x-x_2}{k_2}=\frac{y-y_2}{l_2}=\frac{z-z_2}{m_2}$



Тоді:

- рівняння шуканої площини.

5.4.4 Рівняння площини, яка проходить через задану пряму і задану точку.

Дана пряма l задана рівнянням $l: \ \frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l} = \frac{z-z_0}{m}$ і точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ $(M_1 \notin l)$.

Тоді:

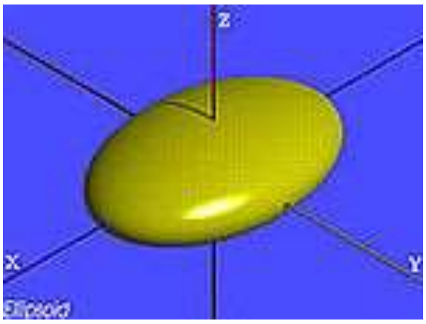
- рівняння шуканої площини.

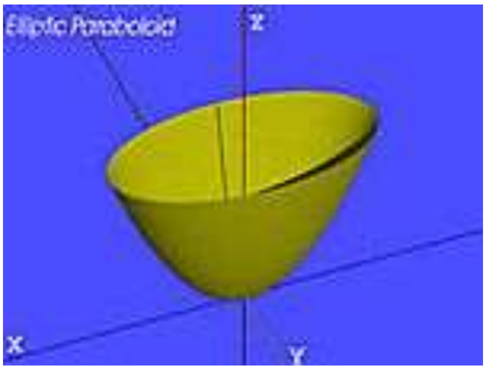
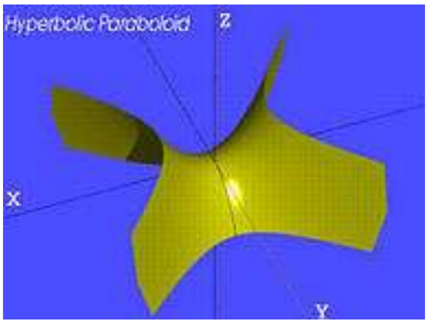
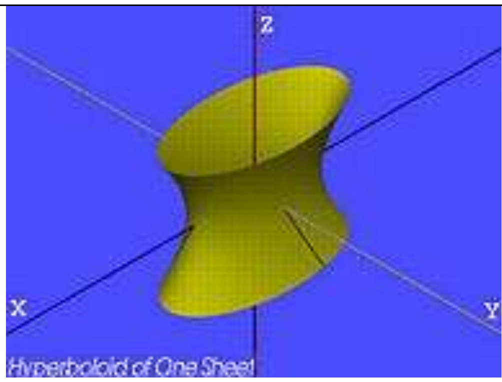
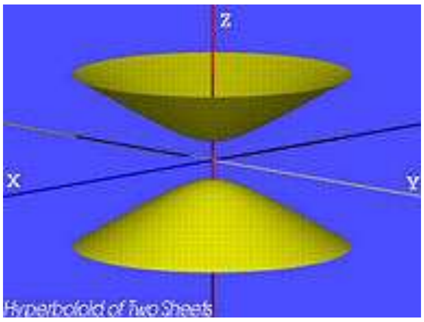
Поверхні другого порядку

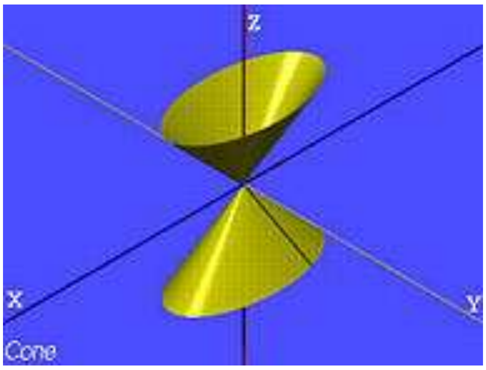
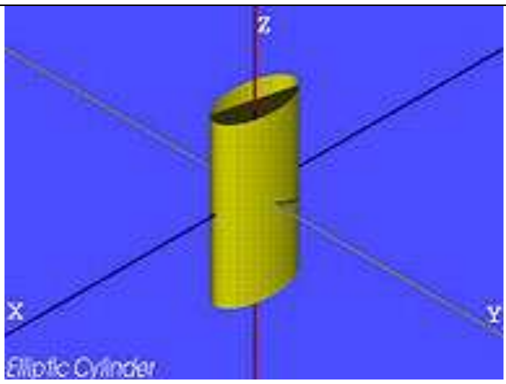
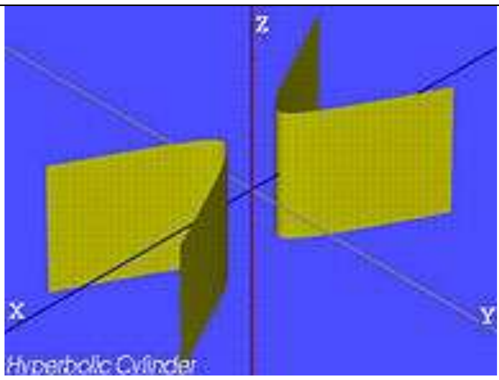
Означення Поверхнею другого порядку називається множина точок, прямокутні координати яких задовольняють рівняння виду:

$$\mathbf{ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + 1 = 0,}$$

де принаймні один з коефіцієнтів a, b, c, d, e, f відмінний від нуля. Це рівняння називається загальним рівнянням поверхні другого порядку.

Еліпсоїд — замкнена центральна поверхня другого порядку. Еліпсоїд має центр симетрії та три осі, які називаються осями еліпсоїда. Точки перетину координатних осей з еліпсоїдом називаються його вершинами. Переріз еліпсоїда площинами є еліпсами (зокрема, завжди можна вказати кругові перерізи еліпсоїда).	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Сфе́ра - замкнена поверхня, геометричне місце точок рівновіддалених від даної точки, що є центром сфери.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$	
Еліптичний		

параболоїд виглядає як овальна чашка й може мати точку максимуму або мінімуму.	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$$ де a, b, c- дійсні півосі	
Гіперболічний параболоїд (не плутати з гіперболоїдом) — це двічі лінійчата поверхня, що має вигляд сідла.	$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$$	
Гіперболоїд однопорожнинний	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ де a і b- дійсні півосі, а с- уявна піввісь;	
Гіпеболоїд двопорожнинний	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ де a і b - уявні півосі, а с- дійсна піввісь.	

Конус	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$	
Еліптичний циліндр	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$	
Гіперболічний циліндр	$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$	
Параболічний циліндр	$$x^2+2ay=0$$