Розв'язання типового варіанта

Приклад 1.

Визначити похідну складеної функції за аргументом t, якщо $z = x^{y+4}, \quad x = e^{t^2}, \quad y = t^2 - 3.$

Для розв`язування використовуємо формули:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}; \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = (y+4)x^{y+4-1};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{y+4}\ln x; \qquad \frac{dx}{dt} = e^{t^2} 2t;$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t.$$

Тоді $\dfrac{dz}{dt} = (y+4)x^{y+3}\cdot e^{t^2}\cdot 2t + x^{y+4}\ln x \cdot 2t =$

$$= 2t\cdot x^{y+3}((y+4)e^{t^2} + x\ln x).$$

У цьому випадку можна одержати результат тільки через аргумент *t:*

$$\frac{dz}{dt} = 2t(e^{t^2})^{t^2}((t^2+1)e^{t^2} + e^{t^2}\ln e^{t^2}) =$$

$$= 2te^{t^4}((t^2+1)e^{t^2} + e^{t^2}t^2) = 2te^{t^4+t^2}(2t^2+1).$$

Приклад 2

Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

σ: $x^2+2xy+y^2-5x+3y+2z=0, \qquad M_o(2;\,1;-1).$

Рівняння дотичної площини має такий вигляд:

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x-x_0) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y-y_0) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z-z_0) = 0,$ де $F(x,\ y,\ z)=0$ – рівняння поверхні σ.

У нашому випадку:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y - 5; \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(M_0) = 4 + 2 - 5 = 1;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y + 3; \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(M_0) = 4 + 2 + 3 = 9;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2; \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(M_0) = 2.$$

Рівняння дотичної площини таке:

$$1(x-2) + 9(y-1) + 2(z+1) = 0.$$

Рівняння нормалі в загальному вигляді:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)}.$$

Тоді для даної поверхні нормаль має рівняння

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{9} = \frac{z+1}{2}.$$

Приклад 3

Перевірити, чи є функція $z = f(x, y)$ розв`язком диференціального рівняння

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad z = \frac{x-y}{3x}.$$

Диференціюємо дану функцію:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{3x^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{3x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-2y}{3x^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{3x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Підставимо отримані похідні в диференціальне рівняння

$$x\left(-\frac{2y}{3x^3}\right)+2y\left(\frac{1}{3x^2}\right)+xy\cdot 0=-\frac{2y}{3x^2}+\frac{2y}{3x^2}=0.$$

Із цього випливає, що функція $z=\dfrac{x-y}{3x}$ є розв`язком даного диференціального рівняння.

Приклад 4

Обчислити наближено: $1.02^{3,01}$

Розглянемо функцію $z=x^y$. Тоді $1.02^{3.01}=(x+\Delta x)^{y+\Delta y}$

Скористаємось формулою (28.7). $z\approx z(x_0,y_0)+dz(x_0,y_0)$

$$x=1.02\,;\ y=3.01$$
$$x_0=1\quad,\ y_0=3$$
$$\Delta x=x-x_0=1.02-1=0.02$$
$$\Delta y=y-y_0=3.01-3=0.01$$

$$Z'x=yx^{y-1}\,;\quad Z'x(1;3)=3*1^2=3$$
$$Z'y=x^y*\ln x;\ Z'y(1;3)=1^3\ln 1=0$$
$$dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y$$
$$dz(1,3)=\ 3*0.02+0*0.01=0.06$$
$$z(1,3)=\ 1^3=1$$
$$1.02^{3.01}\approx 1+0.06=1.06\,.$$

Для порівняння: точне значення $1{,}02^{3{,}01}\approx 1.061418168$

Приклад 5

Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z=\ln(x^2+y^2), x=u*v,\ y=\frac{u}{v}$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x}{x^2+y^2}*v+\frac{2y}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{v}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2x}{x^2+y^2}*u+\frac{2y}{x^2+y^2}\left(-\frac{u}{v^2}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\left(2xv+\frac{2y}{v}\right)}{x^2+y^2}=2\frac{\left(uv^2+\frac{u}{v^2}\right)}{u^2v^2+\frac{u^2}{v^2}}=2\frac{uv^4+u}{u^2v^4+u^2}=2\frac{v^4+1}{u(v^4+1)}=\frac{2}{u}$$

Приклад 6

Знайти частинні похідні функції z, що задана неявно рівнянням: $e^z+z-x^2y+1=0$

$$f(x;y;z)=\ e^z+z-x^2y+1$$
$$f'_x=-2xy\,;\ f'_z=e^z+1\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_z}=\frac{2xy}{e^z+1}$$
$$f'_y=-2x\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_z}=\frac{2x}{e^z+1}$$

Умови завдань для самостійної роботи

Варіант 1

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z=e^{3x-2y},\quad x=\sin t,\ y=t^3.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 2y + 9 = 0;$$
$$M_0(2; 1; -2).$$

3. Перевірити, чи є функція z = f(x, y) розв`язком даного диференціального рівняння

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad z = \frac{y}{x}.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = x^4 y + \frac{y^3}{x}$.

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $1,002 \cdot 2,003^2$.

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z = e^{\sin x} \ln y$, де $x = \frac{1}{\sqrt{t}}, y = t^4 - 1;$

$b) tg\frac{x}{y} - \cos xy = 0.$

Варіант 2

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z = \ln(e^x + e^{-y}), \quad x = t^2, \ y = t^3.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy, \quad M_o(-2, 1, 2).$$

3. Перевірити, чи є функція z = f(x, y) розв`язком даного диференціального рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3), \quad z = \ln\frac{x}{y} + x^3 - y^3.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = \log_2 \frac{x}{y} + \sqrt{x}y.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\lg 10,02 \cdot \cos 61^0$.

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z = \lg(\sqrt{x^2 + y^2})$, де $x = \sqrt[3]{t} - 2, y = 3^t;$

$b) \arccos(xy) + ctg\sqrt{xy} = 0.$

Варіант 3

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z = y^x, \quad x = ln(t-1), \ y = e^{\frac{t}{2}}.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1, \qquad M_0(1, -1, 2).$$

3. Перевірити, чи є функція $z = f(x, y)$ розв`язком даного диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \qquad z = ln(x^2 + (y+1)^2).$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = \ln(xy) + \frac{y}{\sqrt{x}}.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $arctg 1,02 \cdot 1,03^3$.

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z = a^{\sqrt[3]{x-y^2}} xy,$ де $x = t^5, y = \sqrt{t};$

$b) \frac{x^2+y}{y} + \sin(xy) = 0.$

Варіант 4

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z = e^{y-2x+2}\ ,\ x=\sin t,\ \ y=\cos t.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

σ: $z=x^2+2y^2+4xy-5y-10,\qquad M_o(-7, 1, 8).$

3. Перевірити, чи є функція $z = f(x, y)$ розв`язком диференціального рівняння

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x},\quad z = x^y.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = \lg(2x + y) - \frac{1}{xy}.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\sin 29^0 \cdot tg 46^0.$

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z = \sqrt[4]{3y^2 - 4x^4}\cos\frac{x}{y}, x = t^2 - 2, y = t^3;$

$b) \lg\frac{x}{y} + 4^{x^2+y} = 0.$

Варіант 5

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$z=x^2e^y,\ \ x=\cos t,\ \ y=\sin t$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

σ: $z= x^2+y^2-4xy+3x-15,\qquad M_o(-1, 3, 4).$

3. Перевірити, чи є функція z = f(x, y) розв`язком диференціального рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z,\quad z = \frac{xy}{x+y}.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = \sin xy + 2^{xy}.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $1,02^3 \cdot 4,03^2.$

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right) + ctg\left(xy\right), x = \cos t, y = \sin t;$

$b) tg\left(\sqrt[3]{xy}\right) + arctg\frac{x}{y} = 0.$

Варіант 6

1.Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z = \ln(e^x + e^y), x = t^2, y = t^3.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10,\qquad M_0(-1; 1; 3).$$

3. Перевірити, чи є функція $z = f(x, y)$ розв`язком даного диференціального рівняння

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\qquad z=e^{xy}$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u=\cos(x^2y)+5^x.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\sqrt{1,04^2-1,02}.$

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a)z=8^{\arccos\left(\sqrt{xy}\right)}+\sin\left(xy\right),x=2^{t^2},y=t^3;$

$b)\ln\left(\frac{x}{y}\right)-e^{\frac{1}{xy}}=0.$

Варіант 7

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$\mathrm{z}=x^y,\ \mathrm{x}=e^t,\ \mathrm{y}=\ln t.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: x^2+y^2-z^2+6xy-z=8,\qquad M_0(1;1;0).$$

3. Перевірити, чи є функція z = f(x, y) розв`язком диференціального рівняння

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\qquad z=\sin^2(x-ay).$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u=tg\frac{x}{y}+\log_3(xy).$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\sin 31^0\cos 59^0.$

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a)z=tg^3(xy)+\lg\left(\frac{x}{y}\right),x=\sqrt{t},y=4^{\sqrt{t}};\ b)\cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}\right)-\arcsin(xy)=0.$

Варіант 8

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$\mathrm{z}=e^{y-2x},\ x=\sin t,\ \mathrm{y}=t^3.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: 2x^2-y^2+z^2-6x+2y+6=0,\qquad M_0(1;-1;1).$$

3. Перевірити, чи є функція z = f(x, y) розв`язком диференціального рівняння

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad z=y\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u=ctg(xy^2)-\frac{\sqrt{x}}{y}.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $4^{2,01}\cdot ctg 46^0.$

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a)z=(x+5)^{y^2}+ctg\left(\frac{x}{y}\right),x=t^3,y=\sin t;$

$b)\arcsin^2\left(\sqrt{xy}\right)+\lg^2(xy).$

Варіант 9

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z = x^2 e^{-y}, \quad x = \sin t, \quad y = \sin^2 t .$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma : x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z, \qquad M_0(1;0;1).$$

3. Перевірити, чи є функція $z = f(x, y)$ розв`язком даного диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad z = \sin(x - y)$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = \dfrac{\cos x^2}{y} - \ln(x + y).$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\cos 61^0 \cdot ctg 44^0$

6.Знайти похідні $\dfrac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z = (xy)^{\sqrt{y}} - \ln\left(\dfrac{y}{x}\right), x = \sqrt{t}, y = 3^{\sqrt[3]{t}};$

$b) ctg^2(xy) = \sin\left(\sqrt[3]{x^2 - y}\right).$

Варіант 10

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z = \ln(e^{-x} + e^{y}), \quad x = t^2, \mathrm{y} = 2t^3.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma : x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0, \qquad M_0(-1;-1;1).$$

3. Перевірити, чи є функція z = f(x, y) розв`язком даного диференціального рівняння

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad z = e^{-\cos(x+ay)}.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = \arcsin\dfrac{x}{y} + e^{\frac{y}{x}}.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\log_3 3{,}01 \cdot \arcsin 1{,}02.$

6.Знайти похідні $\dfrac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z = \sqrt{xy} \cdot tg(xy), \quad x = \dfrac{1}{2}t^2, y = 3t^3 - 1;\ b) \ln(\sqrt{xy}) - \arccos(xy) = 0.$

Варіант 11

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z = e^{y-2x-1}, \ x = cost, \quad y = sin2t.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: x^2+2y^2+z^2-4xz=8, \qquad M_0(0,2,0).$$

3. Перевірити, чи є функція $z = f(x, y)$ розв`язком даного диференціального рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z; \qquad z = x \ln\frac{y}{x}.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = \arccos(xy) - x^4 y^2.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\ln 1{,}05 \cdot \sqrt{1{,}05^3 + 5{,}01^2}.$

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$z=(x^2+8)^y+\ln x/y, x=t^4, y=\sqrt{t};$

$b) arcctg\sqrt[3]{x/y}-\lg\left(\frac{1}{xy}\right)=0.$

Варіант 12

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z=arcsin\frac{x}{y}\ ,\ x=sint,\quad y=cost$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: x^2+y^2-xz+yz-3x=11,\qquad M_0(1,4,-1).$$

3. Перевірити, чи є функція $z=f(x,y)$ розв`язком даного диференціального рівняння

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z=\ln(x^2+y^2)$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u=arctg\frac{x}{y}+5^{\cos(xy)}.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\ln 1,03\cdot\arcsin 1,02.$

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z=(4-y)^{\arcsin x}+ctg\sqrt{\frac{x}{y}}, x=t^2, y=\frac{1}{t};\ b)\log_4\left(\frac{1}{(xy)^2}\right)+\cos(x^2-y)=0.$

Варіант 13

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z=arccos\frac{2x}{y}\ , x=sint, y=cost.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: x^2-y^2-z^2+xz+4x=-5,\qquad M_0(-2,1,0).$$

3. Перевірити, чи є функція z = f(x, y) розв`язком даного диференціального рівняння

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0\ ,\quad z=\frac{y^2}{3x}+arcsin(xy).$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u=arcctg(x+y)-3^{\ln(xy)}.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $0,97^{1,05}+tg46^0.$

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z=e^{x+y^2}+\arcsin\frac{x}{y}, x=\sin t, y=\cos t;\ b) 3^{xy}-ctg(x-y)=0.$

Варіант 14

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом *t*:

$$z=\frac{x^2}{(y+1)^2}\ , x=1-2t,\ y=arctgt.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: x^2+y^2-z^2+xz+4y=4,\qquad M_0(1,1,2).$$

3. Перевірити, чи є функція $z = f(x, y)$ розв`язком даного диференціального рівняння

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0, \quad z = e^{xy}.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = x\arcsin y + \ln(xy)$.

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\sqrt[3]{2{,}02^2 + 1{,}02^3}$.

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z = \ln(x^2 + 3y) - \arccos^2(xy), x = t^7, y = \sqrt[4]{t};$

$b) \sqrt{\log_4(xy)} - \cos\left(y\sqrt{x}\right) = 0.$

Варіант 15

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z = \left(\frac{x}{y}\right)^3, \quad x = e^t, \quad y = 2 - e^{2t}.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma:\ x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14, \quad M_0(3,1,4).$$

3. Перевірити, чи є функція $z = f(x, y)$ розв`язком даного диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0, \quad z = arctg\frac{x+y}{1-xy}.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = \ln\left(x + y^2\right) - \sqrt{xy}.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\sin 28^0 \cdot \arccos 1{,}01.$

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z = (y^4 - 6)^{x^2} - 5\log_8\left(\frac{x}{y}\right), x = e^t, y = e^{-1/t};$

$b) arcctg\left(3^{xy}\right) + e^{x\cdot\sqrt{y}} = 0.$

Варіант 16

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z = \ln(e^{-x} + 4e^{-2y}), \quad x = t^2, \quad y = \frac{1}{3}t^3.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma:\ 2x^2 - y^2 + 2z + yx + xz = 3, \quad M_0(1,2,1).$$

3. Перевірити, чи є функція $z=f(x,y)$ розв`язком диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1).$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = e^{\arcsin(xy)} - \ln\frac{x}{y}.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $3{,}01^2 \cdot \sin 32^0.$

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z=\left(x^4+\frac{\pi}{8}\right)^{\sqrt{y}}+\ln\frac{y}{\sqrt{x}}, x=t^5, y=\pi^t;$

$b) \arcsin^3\left(\frac{x}{y}\right)-x^{2y-1}=0.$

Варіант 17

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z=\sqrt{x+y^2+3}\ , x=\ln t, y=t^2.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: z=x^2+y^2-3yx-x+y+2, \quad M_0(2,1,0).$$

3. Перевірити, чи є функція $z = f(x, y)$ розв`язком даного диференціального рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+z=0; \qquad z=\frac{2x+3y}{x^2+y^2}.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u=2^{\arccos(xy)}-\ln(3x-y).$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\cos 59^0\cdot\arcsin 1,02.$

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z=\arcsin^2\left(\frac{x}{y}\right)-3^{x^2+y}, x=\sqrt{t}, y=e^{t^2};$

$b) \ln^2(xy)-\cos^3\left(\frac{x}{y}\right)=0.$

Варіант 18

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z=\arcsin\frac{x^2}{y}\ , \ x = \sin t, \ \ y=\cos 2t,$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: 4y^2-z^2+4xy-xz+3z=9, \quad M_0(1,-2,1).$$

3. Перевірити, чи є функція $z = f(x, y)$ розв`язком даного диференціального рівняння:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \quad z=\cos(2x-y).$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u=\log_3\left(\cos(xy)\right)-\frac{x^2}{\sqrt[3]{y}}.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $tg44^0\cdot\sin 28^0.$

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z=\ln^3(x^2-y)-3^{xy}, x=\sqrt[3]{t^2}\cdot y=t^3+1;$

$b) ctg^3\left(\frac{x}{y}\right)-e^{\frac{1}{\sqrt{xy}}}=0.$

Варіант 19

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z=\frac{y^2}{x}\ , x= 1-2t, \ y=1+arctgt.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: x^2-2y^2+z^2+xz-4y=13, \quad M_0(3,1,2).$$

3. Перевірити, чи є функція z = f(x, y) розв`язком даного диференціального рівняння:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u=e^{\ln\left(x^2+y^2\right)}-\sqrt{x-y}.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\dfrac{tg43^0}{2,04^3}$.

6.Знайти похідні $\dfrac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a)z=\log_5^3(y\sqrt{x})+\sqrt{\cos(xy)}, x=3^t, y=\sin^2 t;$

$b)\ln\left[\sin(xy)\right]=\arcsin^2(xy).$

Варіант 20

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом *t*:

$$z=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\ , y=cost, x=sint.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: z=x^2-y^2-2xy-x-2y, \quad M_0(-1,1,1).$$

3. Перевірити, чи є функція *z = f(x, y)* розв`язком даного диференціального рівняння:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z\ , \quad z=(x^2+y^2)\ tg\,\frac{x}{y}\ .$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u=5^{arctg\frac{x}{y}}+\dfrac{y}{\sqrt{x}}.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $1,04\cdot\sqrt[3]{2,03^2}.$

6.Знайти похідні $\dfrac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a)z=\log_2(\arccos(xy))+e^{ctg\frac{x}{y}}, x=3t^3, y=t^2;\ b)\dfrac{1}{(x^2+y)^{\frac{3}{2}}}+6^{\frac{x}{y}}=0.$

Варіант 21

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z=\sqrt{x^2+y+8}, x=t^2,\ y=\ln t\ \ .$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: z=y^2-x^2+2xy-3y, \quad M_0(1,-1,1).$$

3. Перевірити, чи є функція *z = f(x, y)* розв`язком даного диференціального рівняння

$$9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \quad z=e^{-(x+3y)}\sin(x+3y)\ .$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u=arctg^2(xy)+e^{xy}.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $arctg1,08\cdot\sqrt[3]{2,03}.$

6.Знайти похідні $\dfrac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a)z=e^{\cos x+\sin y}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{3/2}, x=3^t, y=\sqrt{t};\ b)ctg^2\sqrt{xy}-\arcsin\left(e^{xy}\right)=0.$

Варіант 22

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z = \arcsin\frac{x}{2y},\ x = \sin t,\ y = \cos t\ .$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y,\quad M_0(-1,-1,-1).$$

3. Перевірити, чи є функція $z = f(x, y)$ розв`язком даного диференціального рівняння:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,\qquad z = xe^{y/x}.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = arcctg^3\frac{x}{y} - 4^{xy}.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $2,01^3\cdot arctg1,02.$

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z = 3^{\sqrt{x+y}} + arctg\left(\frac{x}{y}\right), x = \sin t, y = \cos t;$

$b)\ln(\arccos xy) - \cos\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$

Варіант 23

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x},\ x = \sin 2t,\ y = tg^2 t\ .$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: y^2 - z^2 + x^2 - 2xz + 2x = z,\quad M_0(1,1,1).$$

3. Перевірити, чи є функція z=f(x,y) розв`язком диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,\qquad z = arctg\frac{y}{x}.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = \sin(x^5 - y^3) + \ln(x^2 y).$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $2,02^2\cdot 4^{1,05}.$

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z = \sin^2(2x - 4y) + \ln\sqrt[3]{xy}, x = t, y = t^3;$

$b) ctg(5x - y) + e^{\sqrt{x} - \lg y} = 0.$

Варіант 24

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z = \sqrt{x + y + 10},\ x = e^t,\ y = \ln t\ .$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma:\ x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2,\qquad M_0(1,1,1).$$

3. Перевірити, чи є функція z = f(x, y) розв`язком даного диференціального рівняння:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,\qquad z = arctg\frac{x}{y}.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = \lg^2(xy) + \sqrt[3]{x + y}.$

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $2,08^2 \cdot \cos 58^0$.

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z = \arcsin\left(3^x - 2^y\right) - \lg^4\left(\frac{x}{y}\right), x = \sqrt[3]{t}, y = t^2;$

$b) e^{arctg(5x-y)} + \left(4y - x\right)^{3/2} = 0.$

Варіант 25

1. Визначити похідну складеної функції по аргументу t:

$$z = \frac{y}{x},\ x = e^t,\ y = 1 - e^{2t}\ .$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma:\ x^2 + y^2 - xz - yz = 0,\quad M_0(0,2,2).$$

3. Перевірити, чи є функція z = f(x, y) розв\`язком даного диференціального рівняння:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,\quad z = \ln(x + e^{-y}).$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = {}^{\lg\frac{x}{y}} - \arcsin(xy)$.

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\sin 32^0 \cdot \cos 58^0$.

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z = \ln^2(3x^2 - 4y^3) + \arccos\frac{2x}{y}, x = e^t, y = t^5;$

$b) ctg\left(2x\sqrt[3]{y}\right) - \lg\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$

Варіант 26

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z = arcsin\frac{2x}{y}\ ,\ x = sint,\ y = cost.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma:\ x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46,\quad M_0(1,2,-3).$$

3. Перевірити, чи є функція $z = f(x, y)$ розв\`язком даного диференціального рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,\qquad z = arcsin\frac{x}{x+y}.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u = \frac{1}{\sqrt{xy}} - x^{2y^2}$.

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\log_6 6,01 \cdot tg 47^0$.

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z = \arccos^2(5x^2 - 3y) - \pi^{\sqrt{xy}}, x = \sin t, y = \cos t;$

$b) \sqrt{\cos(7x^2 - y)} + 3xy = 0.$

Варіант 27

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z = ln(e^{2x} + e^{3y}),\ x = t^2,\ y = t^4.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: x^2+y^2+z^2-6y+4z+4=0, \qquad M_0(2,1,-1).$$

3. Перевірити, чи є функція $z = f(x, y)$ розв`язком даного диференціального рівняння:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}, \qquad z=\frac{y}{(x^2-y^2)^5}.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u=\ln\left(\cos\frac{x}{y}\right)-x^5y^2$.

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\cos 63^0\cdot arctg 0,98$.

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z=\arcsin(\ln(xy))+e^{x^2+y^2}, x=3^{t^2}, y=\ln t;$

$b) \cos^3(3x^2-y)+\ln(xy)=0.$

Варіант 28

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z=arctg(x+y), \quad x=t^2+2, \quad y=4-t^4.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: 2x^2-y^2+z^2-4z+y=13, \qquad M_0(2,1,-1).$$

3. Перевірити, чи є функція $z=f(x,y)$ розв`язком диференціального рівняння:

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2\frac{x+y}{x-y}, \qquad z=\frac{x^2+y^2}{x-y}.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u=(x+y)^{\frac{3}{2}}+\arccos(xy)$.

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\sqrt{5,02^3}\cdot\sin 31^0$.

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z=5^{\sqrt{4x^2-y^2}}-x\cdot\sqrt[5]{x/y}, x=e^t, y=\ln t;$

$b) \log_7(4x^2-5y)+arctg\sqrt{x/y}=0.$

Варіант 29

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z=\sqrt{x^2+y^2+3}, \quad x=lnt, \quad y=t^3.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: x^2+y^2+z^2+6y+4x=8, \qquad M_o(-1, 1, 2).$$

3. Перевірити, чи є функція z=f(x, y) розв`язком диференціального рівняння:

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+2y}{z}, \quad z=\sqrt{2xy+y^2}.$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u=arctg\left(\ln(xy)\right)-\sqrt[3]{xy}$.

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $\cos 61^0\cdot ctg 46^0$.

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z=\sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2}}-arcctg^2(xy), x=a\sin 2t, y=a\cos 3t, a=const;$

$b) \sqrt[4]{\ln(4xy)}-tg\, {x}/{\sqrt{y}}=0.$

Варіант 30

1. Визначити похідну складеної функції за аргументом t:

$$z=arctg(xy), \quad x=t+3, \quad y=e^t.$$

2. Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

$$\sigma: x^2+y^2+z^2-xy+3z=7, \qquad M_0(1, 2, 1).$$

3. Перевірити, чи є функція $z = f(x, y)$ розв`язком даного диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \quad z=\ln(x^2-y^2).$$

4.Знайти частинні похідні першого і другого порядку $u=arcctg\left(2^{xy}\right)-\frac{1}{xy}$.

5. Замінюючи приріст функції диференціалом, обчислити наближено $ctg 47^0 \cdot 5^{1,02}$.

6.Знайти похідні $\frac{dz}{dt}$ складної функції і y'_x функції,заданої параметрично

$a) z=ctg^4\frac{1}{xy}-e^{\log_2\sqrt{xy}}, x=t^{3/2}, y=e^t;$

$b) \log_4\left(arcctg\frac{1}{xy}\right)-\arccos\sqrt[3]{\frac{1}{x}-y}.$