Міністерство освіти і науки України

Сумський державний університет

4347 Робочий зошит

із дисципліни «Вища математика»

на тему «Диференціальні рівняння»

для студентів усіх інженерних спеціальностей

денної форми навчання

Суми

Сумський державний університет

2018

Робочий зошит із дисципліни «Вища математика» на тему «Диференціальні рівняння» / укладачі: Н. І. Одарченко, І. О. Шуда. – Суми : Сумський державний університет, 2018. – 11 с.

Кафедра математичного аналізу і методів оптимізації

Інтегрування диференціальних рівнянь I порядку

1. Рівняння вигляду $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ називають диференціальним рівнянням із відокремленими змінними.

Приклад 1. Проінтегрувати диференціальне рівняння і знайти його частинний розв'язок, що задовольняє умову $y(1) = 2$, $(1+x^2)dy - 2xydx = 0$.

Поділимо обидві частини рівняння на добуток $y(1+x^2)$:

$\frac{dy}{y} - \frac{2xdx}{1+x^2} = 0$, $\frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{1+x^2}$.

Проінтегруємо одержане рівняння:

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2xdx}{1+x^2}$; $\ln|y| = \ln\left|1+x^2\right| + \ln|C| = \left|\begin{matrix} 1+x^2 \\ dt = 2xdx \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + \ln|C| = \ln\left|1+x^2\right| + \ln|C|$,

$\ln|y| = \ln\left|C\cdot(1+x^2)\right|$, $y = C(1+x^2)$ – загальний розв'язок диференціального рівняння;

$2 = C(1+x^2)$, $2 = C\cdot 2$, $C=1$, $y = (1+x^2)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння.

Приклад 1 (для самостійної роботи) $\left((k+1)+x^{k+1}\right)dy - (k+1)x^k ydy = 0$.

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння $2xy' = \frac{y^2}{x}$.

$2x\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$, $2xdy = \frac{y^2}{x}dx$, $2x^2dy = y^2dx$.

Поділимо обидві частини рівняння на добуток x^2y^2: $\frac{2dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2}$.

Проінтегруємо одержане рівняння: $\int \frac{2dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$, $2\int y^{-2}dy = \int x^{-2}dx$, $2\frac{y^{-1}}{-1} = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{C}{-1}$,

$\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + C$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Приклад 2 (для самостійної роботи) $(k+2)x^{3k-1}\cdot y' = \frac{y^{k-2}}{x}$.

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння $xy' = 1-y$.

$x\frac{dy}{dx} = 1-y$, $xdy = (1-y)dx$.

Поділимо обидві частини рівняння на добуток $x(1-y)$: $\frac{dy}{1-y} = \frac{dx}{x}$.

Проінтегруємо одержане рівняння: $\int\frac{dy}{1-y} = \int\frac{dx}{x}$, $-\ln|1-y| = \ln|x| + \ln|C|$;

$\ln\left|\frac{1}{1-y}\right| = \ln|x\cdot C|$, $\frac{1}{1-y} = x\cdot C$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Приклад 3 (для самостійної роботи) $(3k-2)xy' = (y+(5k-1))$.

Приклад 4. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = \frac{e^{2x}}{\ln y}$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{\ln y}$, $\ln ydy = e^{2x}dx$.

Проінтегруємо одержане рівняння: $\int \ln ydy = \int e^{2x}dx$,

$$\left|\begin{matrix} u = \ln y & du = \frac{1}{y}dy \\ dv = dy & v = y \end{matrix}\right| \Rightarrow y\ln y - \int y\frac{1}{y}dy = y\ln y - \int dy = y\ln y - y + C,$$

$y\ln y - y + C = \frac{1}{2}e^{2x}$ – загальний розв'язок рівняння.

Приклад 4 (для самостійної роботи) $y=\dfrac{e^{(2k+1)x}}{\ln\left(\left(2k+1\right)y\right)}$.

2. Однорідним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння такого вигляду: $y'=f\left(1;\ \dfrac{y}{x}\right)=\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Рівняння $y'=f\left(x;y\right)$ за допомогою заміни $y=xu$ $\left(u=\dfrac{y}{x};\ y'=u'x+u\right)$ зводиться до рівняння з відокремленими змінними.

Приклад 5. Розв’язати рівняння $y^2+x^2y'=xyy'$.

Запишемо це рівняння у такому вигляді: $\left(-x^2+xy\right)y'=y^2$, $y'=\dfrac{y^2}{xy-x^2}$;

Зробимо заміну: $y=ux$, $y'=u'x+u$:

$$u'x+u=\frac{x^2u^2}{x\cdot xu-x^2},\ u'x+u=\frac{x^2u^2}{x^2\left(u-1\right)}=\frac{u^2}{u-1},\ u'x=\frac{u^2}{u-1}-u,\ u'x=\frac{u^2-u^2+u}{u-1}=\frac{u}{u-1},$$

$$\frac{du}{dx}x=\frac{u}{u-1},\ dux=\frac{u}{u-1}dx.$$

Поділимо обидві частини рівняння на вираз $x\dfrac{u}{u-1}$: $\dfrac{u-1}{u}du=\dfrac{dx}{x}$.

Проінтегруємо одержане рівняння:

$$\int\left(1-\frac{1}{u}\right)du=\int\frac{dx}{x},\ u-\ln|u|=\ln|x|+C,\ u=\ln|xu|+C,\ \frac{y}{x}=\ln\left|x\frac{y}{x}\right|+C,$$

$\dfrac{y}{x}=\ln|y|+C$ – загальне розв’язання диференціального рівняння.

Приклад 5 (для самостійної роботи) $\left(k+1\right)y^2+x^2y'=\left(k+1\right)xyy'$.

Приклад 6. Розв’язати диференціальне рівняння і знайти його частинний розв’язок $xy' = y(1+\ln y - \ln x)$, $y(1)=e^2$.

Запишемо наше рівняння у вигляді $y' = \dfrac{y}{x}\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right)$.

Зробимо заміну: $y = xu$, $\left(u = \dfrac{y}{x};\ \ y' = u'x+u\right)$:

$u'x+u = u(1+\ln u)$, $u'x+u = u+u\ln u$, $u'x = u\ln u$, $\dfrac{du}{dx}x = u\ln u$, $du\cdot x = u\ln u\cdot dx$.

Поділимо обидві частини рівняння на вираз $xu\ln u$: $\dfrac{du}{u\ln u} = \dfrac{dx}{x}$.

Проінтегруємо одержане рівняння:

$$\int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x},\ \left|\begin{aligned}\ln u &= t\\ dt &= \frac{1}{u}du\end{aligned}\right| \Rightarrow \int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + \ln|C| = \ln|\ln u| + \ln|C|,$$

$\ln|C\cdot\ln|u|| = \ln|x|$,

$C\cdot\ln\left|\dfrac{y}{x}\right| = x$ – загальний розв’язок для диференціального рівняння.

Частинний розв’язок знаходимо з умови: $y(1)=e^2$, $C\cdot\ln\left(\dfrac{e^2}{1}\right)=1$, $C-2=1$, $C=\dfrac{1}{2}$,

$\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y}{x}\right| = x$ – частинний розв’язок диференціального рівняння.

Приклад 6 (для самостійної роботи) $xy' = y\left(1+\ln - \ln\left((k+1)x\right)\right)$, $y(1)=e^3$.

Приклад 7. Розв'язати диференціальне рівняння $xy' = y - e^{\frac{y}{x}}$.

Запишемо це рівняння у вигляді $y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}$.

Зробимо заміну: $y = xu$, $\left(u = \frac{y}{x};\ y' = u'x + u\right)$:

$u'x + u = u - e^{u}$, $u'x = -e^{u}$, $\frac{du}{dx}x = -e^{u}$, $du \cdot x = -e^{u}dx$.

Поділимо рівняння на вираз xe^{u}: $\frac{du}{e^{u}} = -\frac{dx}{x}$.

Проінтегруємо одержане рівняння: $\int \frac{du}{e^{u}} = -\int \frac{dx}{x}$, $\int e^{-u}du = -\int \frac{dx}{x} - e^{-u} = -\ln|x| - \ln|C|$,

$\frac{1}{e^{u}} = \ln|x \cdot C|$, $\frac{1}{e^{y/x}} = \ln|x \cdot C|$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Приклад 7 (для самостійної роботи) $xy' = y - x(3k-1)e^{(k+1)y/x}$.

____

____

____

____

3. Рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$ лінійне відносно невідомої функції у та її похідної y' називають лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Інтегрують лінійне диференціальне рівняння за допомогою підстановки: $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$.

Приклад 8. Проінтегрувати рівняння $y' + y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ і розв'язати задачу Коші за початкових умов $y(\pi) = 1$.

Зробимо підстановку: $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$.

$u'v + uv' + uv\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $u'v + u\left(v' + v\operatorname{tg} x\right) = \frac{1}{\cos x}$.

Знаходимо частинний розв'язок рівняння $v' + v\operatorname{tg} x = 0$;

$\frac{dv}{dx} = -v\operatorname{tg} x$, $dv = -v\operatorname{tg} x \cdot dx$, $\frac{dv}{v} = -\frac{\sin x}{\cos x} dx$.

Проінтегруємо це рівняння: $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$, $\left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right|$, $\ln|v| = \int \frac{dt}{t}$,

$\ln|v| = \ln|t|$, $v = \cos x$.

Далі знаходимо загальний розв'язок рівняння:

$u'v = \frac{1}{\cos x}$, де $v = \cos x$. Тоді одержуємо: $u' \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x}$, $u' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $u = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$, $u = \operatorname{tg} x + C$.

Загальний розв'язок цього рівняння $y = uv = (\operatorname{tg} x + C)\cos x$.

Із нього виділяємо частинний розв'язок, що задовольняє початкові умови:

$y(\pi) = 1$, $1 = (\operatorname{tg}\pi + C)\cos\pi$, $1 = C(-1)$, $C = -1$.

Частинний розв'язок цього рівняння $y = (\operatorname{tg} x - 1)\cos x$.

Приклад 8 (для самостійної роботи). Проінтегрувати рівняння $y' - yctgx = \frac{(k+1)}{\sin x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

____

____

____

____

Приклад 9. Проінтегрувати рівняння $y' = e^{2x} - y$, $y(0) = 1$ і знайти його частинний розв'язок.

Зробимо підстановку: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, $u'v + uv' + uv = e^{2x}$, $u'v + u(v' + v) = e^{2x}$.

Знаходимо частинний розв'язок рівняння: $v' + v = 0$, $\frac{dv}{dx} = -v$, $\frac{dv}{v} = -dx$.

Проінтегруємо останнє рівняння: $\int \frac{dv}{v} = -\int dx$, $\ln|v| = -x$, $v = e^{-x}$.

Далі знаходимо загальний розв'язок рівняння: $u'v = e^{2x}$, де $v = e^{-x}$. Тоді одержуємо: $u'e^{-x} = e^{2x}$, $u' = \dfrac{e^{2x}}{e^{-x}} = e^{3x}$, $\dfrac{du}{dx} = e^{3x}$, $du = e^{3x}dx$, $\int du = \int e^{3x}dx$, $u = \dfrac{1}{3}e^{3x} + C$.

Загальний розв'язок цього рівняння $y = e^{-x}\left(\dfrac{1}{3}e^{3x} + C\right)$.

Із нього виділяємо частинний розв'язок, що задовольняє початкові умови: $y(0) = 1$, $1 = e^{0}\left(\dfrac{1}{3}e^{0} + C\right)$, $1 = \dfrac{1}{3} + C$, $C = \dfrac{2}{3}$.

Частинний розв'язок цього рівняння $y = e^{-x}\left(\dfrac{1}{3}e^{3x} + \dfrac{2}{3}\right)$.

Приклад 9 (для самостійної роботи) $y' - (7k-3)y = e^{5k-2}$, $y(0) = 3$.

____

____

____

____

Приклад 10. Проінтегрувати рівняння $xy' - 2y = 2x^4$.

Запишемо це рівняння у вигляді $y' - \dfrac{2y}{x} = 2x^3$.

Зробимо підстановку: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, $u'v + uv' - \dfrac{2uv}{x} = 2x^3$, $u'v + u\left(v' - \dfrac{2v}{x}\right) = 2x^3$.

Знаходимо частковий розв'язок рівняння: $v' - \dfrac{2v}{x} = 0$, $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2v}{x}$, $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{2dx}{x}$

Проінтегруємо останнє рівняння: $\int \dfrac{dv}{v} = 2\int \dfrac{dx}{x}$, $\ln|v| = 2\ln|x|$, $\ln|v| = \ln|x|^2$, $v = x^2$.

Далі знаходимо загальний розв'язок рівняння: $u'v = 2x^3$, де $v = x^2$. Тоді одержуємо: $u'x^2 = 2x^3$, $u' = 2x$, $u = \int 2x dx$, $u = 2\dfrac{x^2}{2} + C$, $u = x^2 + C$.

Загальний розв'язок цього рівняння $y = uv = x^2\left(x^2 + C\right)$.

Приклад 10 (для самостійної роботи) $xy' - (k+2)y = (3k+2)x^{(k+2)}$.

Навчальне видання

4347 Робочий зошит
із дисципліни «Вища математика»
на тему «Диференціальні рівняння»
для студентів усіх інженерних спеціальностей
денної форми навчання

Відповідальний за випуск І. О. Шуда
Редактор Н. З. Клочко
Комп’ютерне верстання М. А. Руденко

Підписано до друку 24.01.2018, поз.
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 0,70. Обл.-вид. арк. 0,38. Тираж 20 пр. Зам. №
Собівартість вид. грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.