Міністерство освіти і науки України

Сумський державний університет

4345 Робочий зошит

із дисципліни «Вища математика»

на тему «Кратні інтеграли»

для студентів усіх інженерних спеціальностей

денної форми навчання

Суми

Сумський державний університет

2018

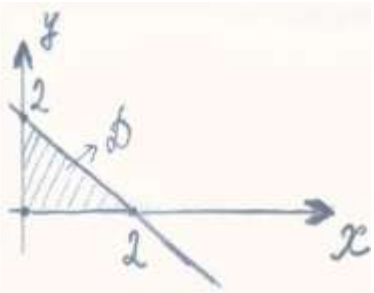
Робочий зошит із дисципліни «Вища математика» на тему «Кратні інтеграли» / укладачі: Н. І. Одарченко, І. О. Шуда. – Суми : Сумський державний університет, 2018. – 26 с.

Кафедра математичного аналізу і методів оптимізації

Подвійний інтеграл

$$\iint\limits_D f(x;y) = \lim_{di \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$$

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+y+3)dxdy$, якщо D обмежена лініями $x+y=2$, $x=0$, $y=0$.



Область інтегрування D обмежена прямою $y=2-x$ і осями координат:

$$D:\begin{cases} 0 \le x \le 2; \\ 0 \le y \le 2-x. \end{cases}$$

Отже,

$$\iint\limits_D (x+y+3)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x+y+3)dy = \int_0^2 dx\left(xy + \frac{y^2}{2} + 3y \right)\Big|_0^{2-x} = \int_0^2 dx\left(x(2-x) + \frac{(2-x)^2}{2} + 3(2-x) \right) =$$

$$= \int_0^2 \left(2x - x^2 + \frac{4-4x+x^2}{2} + 6 - 3x \right)dx = \int_0^2 \left(-\frac{x^2}{2} - 3x + 8 \right)dx = \left(-\frac{x^3}{6} - 3\frac{x^2}{2} + 8x \right)dx\Big|_0^2 = -\frac{8}{6} - 3\frac{4}{2} + 16 =$$

$$= -\frac{4}{3} - 6 + 16 = \frac{26}{3}.$$

Приклад для самостійної роботи: $\iint\limits_D (x+y-k)dx$, $y+x=k+1$, $x=0$, $y=0$.

____

____

____

____

____

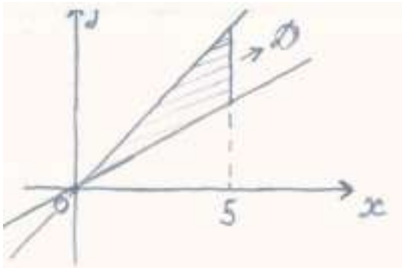
____

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл

$$\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2+2y)dy = \int_0^2 dx\left(x^2 y + 2\frac{y^2}{2} \right)\Big|_0^1 = \int_0^2 (x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right)\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$$

Приклад для самостійної роботи: $\int_0^2 dx \int_0^1 \left(kx^2 + (2k-3)y^{k+1} \right)dy$.

Приклад 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x(y-1)\,dxdy$, якщо D обмежена лініями $y=5x$, $y=x$, $x=5$.



Область інтегрування D задається системою нерівностей:

$$D:\begin{cases} 0\le x\le 5; \\ x\le y\le 5x. \end{cases}$$

Отже,

$$\iint\limits_D x(y-1)\,dxdy=\int_0^5 dx\int_x^{5x} x(y-1)\,dy=\int_0^5 xdx\int_x^{5x}(y-1)\,dy=\int_0^5 xdx\frac{(y-1)^2}{2}\Big|_x^{5x}=\frac{1}{2}\int_0^5 xdx\left((5x-1)^2-(x-1)^2\right)=$$

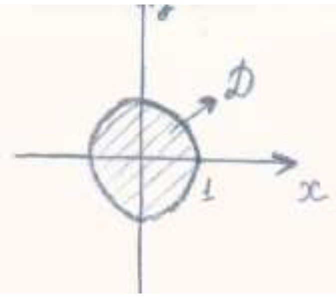
$$=\frac{1}{2}\int_0^5 x\left(25x^2-10x+1-x^2+2x-1\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^5\left(24x^3-8x^2\right)dx=\frac{1}{2}\left(24\frac{x^4}{4}-8\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^5=\frac{1}{2}\left(6\cdot 625-\frac{8}{3}\cdot 125\right)=$$

$$=\frac{125}{2}\left(\frac{82}{3}\right)=\frac{5125}{3}.$$

Приклад для самостійної роботи: $\iint\limits_D e^y\,dxdy$, D: $y=\ln(kx)$, $y=0$, $x=k$.

Приклад 4. Обчислити подвійний інтеграл, використовуючи полярні координати:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\iint\limits_D f(r\cos\varphi;r\sin\varphi)\,rdrd\varphi,$$



$$\iint\limits_D \sqrt{\left(x^2+y^3\right)^3}dxdy \text{, D – коло } x^2+y^2=1.$$

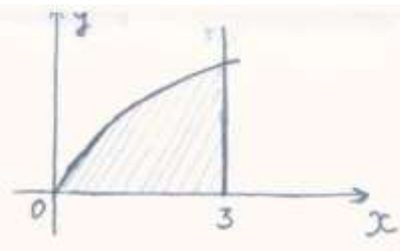
$$D^*:\begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi; \\ 0\le r\le 1. \end{cases}$$

$$\iint\limits_D \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}dxdy=\iint\limits_{D^*}\sqrt{\left(r^2\right)^3}rdrd\varphi=\iint\limits_{D^*}r^3rdrd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r^4dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\frac{r^5}{5}\Big|_0^1=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\cdot\frac{1}{5}=$$

$$=\frac{1}{5}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{5}\cdot 2\pi=\frac{2\pi}{5}.$$

Приклад для самостійної роботи: $\iint\limits_D \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^{k+1}}dxdy$, D: $x^2+y^2=(k+1)^2$.

Приклад 5. Обчислити площу плоскої області D, обмежену заданими лініями:



$y^2=4x$, $x=3$, $y\ge 0$

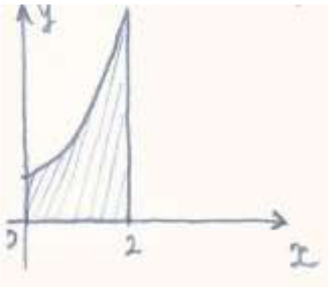
$$S=\iint\limits_D dxdy; \qquad D:\begin{cases} 0\le x\le 3; \\ 0\le y\le\sqrt{4x}. \end{cases}$$

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{\sqrt{4x}}dy=\int\limits_0^3 dxy\Big|_0^{\sqrt{4x}}=\int\limits_0^3\sqrt{4x}dx=2\int\limits_0^3 x^{\frac{1}{2}}dx=2\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^3=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^3=\frac{4}{3}\sqrt{27}=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot 3\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

Приклад для самостійної роботи: $y^2=(k+1)^2x$, $x=1$, $y\ge 0$.

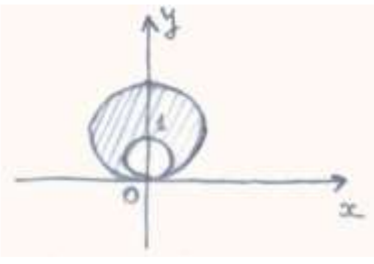
Приклад 6. Обчислити площу фігури, обмежену заданими лініями: $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.



$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 2; \\ 0 \le y \le x^2 + 1. \end{cases}$$

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2+1} dy = \int_0^2 dx \cdot y\Big|_0^{x^2+1} = \int_0^2 \left(x^2 + 1\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$$

Приклад для самостійної роботи: $y = (k+1)x^2 + k$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 0$.



Приклад 7. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

$r_1 = \sin\varphi$, $r_2 = 2\sin\varphi$.

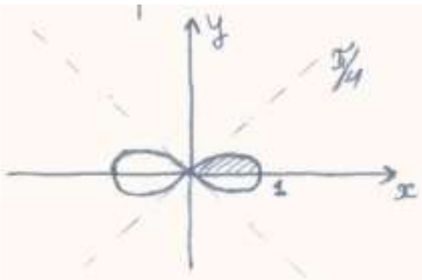
$$\frac{D^*}{2}:\begin{cases} 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2};\\ \sin\varphi\le r\le 2\sin\varphi. \end{cases}$$

$$S=\iint\limits_{D^*} r\,d\varphi\,dr=2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi}r\,dr=2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\frac{r^2}{2}\Big|_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi}=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\left(4\sin^2\varphi-\sin^2\varphi\right)=\int\limits_0^{\pi/2}3\sin^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=3\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\cos 2\varphi\right)d\varphi=\frac{3}{2}\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

Приклад для самостійної роботи: $r_1=k\cos\varphi$, $r_2=\left(k+1\right)\cos\varphi$.

Приклад 8. Обчислити площу фігури, обмежену лініями: $r=\sqrt{\cos 2\varphi}$.



$\cos 2\varphi\ge 0$,

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi k\le 2\varphi\le\frac{\pi}{2}+2\pi k,$$

$$-\frac{\pi}{4}+\pi k\le\varphi\le\frac{\pi}{4}+\pi k.$$

$$\frac{D^*}{4}:\begin{cases} 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4};\\ 0\le r\le\sqrt{\cos 2\varphi}. \end{cases}$$

$$S=\iint\limits_{D^*} r d\varphi dr\,,$$

$$S=4\iint\limits_{D^*} r d\varphi dr=4\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr=4\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\pi/4}=2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\cdot\cos 2\varphi=2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4}=$$

$$=\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$$

Приклад для самостійної роботи: $r=(k+1)\sqrt{\sin 2\varphi}$.

Приклад для самостійної роботи: $y=kx^2$, $y=kx$, $x=1$.

Приклад для самостійної роботи: $y=\sqrt{k^2-x^2}$, $x\geq 0$.

Потрійний інтеграл

Межу суми, знайденої за умови $di \to 0$, називають потрійним інтегралом функції $f(x;\, y;\, z)$ в області V і позначають $\iiint\limits_V f(x;\, y;\, z)\, dv$:

$$\iiint\limits_V f(x;\, y;\, z)\, dv = \lim_{di \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\, y_i, z_i)\, \Delta V_i .$$

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V \left(2x^2 + 3y + z\right) dxdydz$, $V: 2 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 4$.

$$\iiint\limits_V \left(2x^2 + 3y + z\right) dxdydz = \int_2^3 dx \int_{-1}^2 dy \int_0^4 \left(2x^2 + 3y + z\right) dz = \int_2^3 dx \int_{-1}^2 dy \int_0^4 \left(2x^2 z + 3yz + \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 =$$
$$= \int_2^3 dx \int_{-1}^2 dy \left(2x^2 \cdot 4 + 3y \cdot 4 + \frac{4^2}{2}\right) = \int_2^3 dx \int_{-1}^2 \left(8x^2 + 12y + 8\right) dy = \int_2^3 dx \left(8x^2 y + 12y^2 \cdot 2 + 8y\right)\Big|_{-1}^2 =$$
$$= \int_2^3 dx \left(\left(8x^2 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2\right) - \left(8x^2(-1) + 6(-1) + 8(-1)\right)\right) = \int_2^3 \left(16x^2 + 24 + 16 + 8x^2 - 6 + 8\right) dx =$$
$$= \int_2^3 \left(24x^2 + 42\right) dx = \left(24\frac{x^3}{3} + 42x\right)\Bigg|_2^3 = \left(8x^3 + 42x\right)\Big|_2^3 = \left(8 \cdot 3^3 + 42 \cdot 3\right) - \left(8 \cdot 2^3 + 42 \cdot 2\right) =$$
$$= 216 + 126 - 64 - 84 = 342 - 148 = 194.$$

Приклад для самостійної роботи: $\iiint\limits_V \left(kx^2 + (k-1)y + (k-8)z\right) dxdydz$, $V: -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ -1 \le z \le 0$.

____

____

____

____

____

____

Приклад 2. $\iiint\limits_V xyz^2 dxdydz$, $V: 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 0,\ 0 \le z \le 4$.

$$\iiint\limits_V xyz^2dxdydz = \int\limits_0^2 xdx\int\limits_{-1}^0 dy\int\limits_0^4 z^2dz = \int\limits_0^2 xdx\int\limits_{-1}^0 dy\,\frac{z^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{1}{3}\int\limits_0^2 xdx\int\limits_{-1}^0 dy\cdot 4^3 = \frac{64}{3}\int\limits_0^2 xdxy\Big|_{-1}^0 =$$

$$= \frac{64}{3}\int\limits_0^2 xdx\left(0+1\right) = \frac{64}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{32}{2}\cdot 4 = \frac{128}{3}.$$

Приклад для самостійної роботи: $\iiint\limits_V x^2y^{k+2}z^kdxdydz$, $V: 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 0$, $-1\le z\le 1$.

____

____

____

____

____

Приклад для самостійної роботи: $\iiint\limits_V \left(x^ky-\left(k+2\right)z\right)dxdydz$, $V: -1\le x\le 1$, $0\le y\le 1,\ 1\le z\le 2$.

____

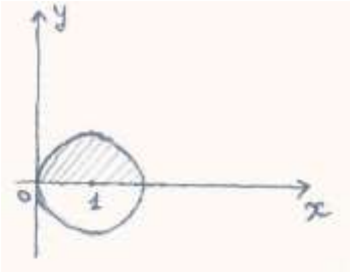
____

____

____

____

Приклад 3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, $V: x^2+y^2=2x,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ z=3$.

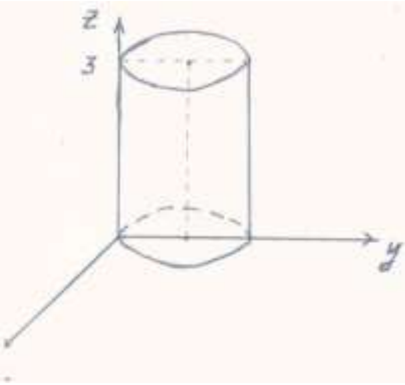


$x^2+2x+1+y^2=1;\qquad \left(x+1\right)^2+y^2=1;$

$r^2=2r\cos\varphi;\ r=2\cos\varphi.$

$$D^*:\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi. \end{cases}$$

Проекція області інтегрування на площину *ХоУ*:



$$V^*:\begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi; \\ 0 \le z \le 3. \end{cases}$$

Область інтегрування

$$\iiint\limits_V V^*:\sqrt{x^2+y^2}\,dxdzdy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} rdr \int_0^3 zdz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2dr\,\frac{z^2}{2}\Big|_0^3 = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2dr\left(\frac{9}{2}-0\right) =$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\varphi} = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\left(2\cos\varphi\right)^3 d\varphi = \frac{24}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\cdot\cos\varphi = 12\int_0^1\left(1-t^2\right)dt = 12\left(1-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 12\left(1-\frac{1}{3}\right) = 12\cdot\frac{2}{3} = 8.$$

$\sin\varphi = t;$

$dt = \cos\varphi d\varphi;$

$$\begin{vmatrix} \varphi & 0 & \dfrac{\pi}{2} \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$\cos^2\varphi = 1-\sin^2\varphi;$

Приклад для самостійної роботи: $\iiint\limits_V z^{k+1}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^k}\,dxdydz$, $V: x^2+y^2=k^2$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $z = 1$.

____

____

____

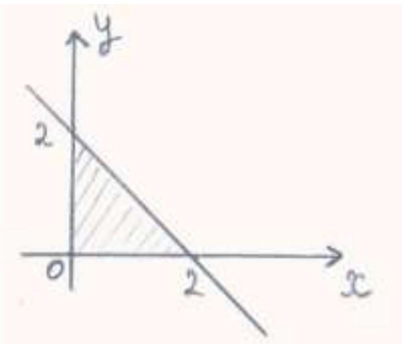
____

____

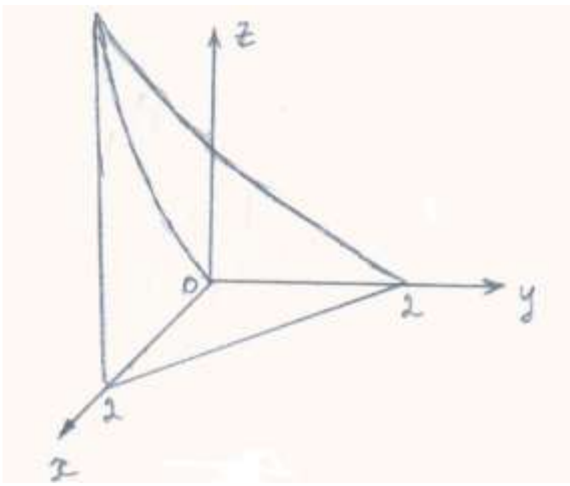
Приклад для самостійної роботи: $\iiint\limits_V \frac{k \cdot y \cdot dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $V: x^2+y^2=2kx$, $y \ge 0$, $z=3k+2$.

Приклад для самостійної роботи: $\iiint\limits_V z^{k+1}dxdydz$, $k^2 \le x^2+y^2 \le (k+1)^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $z=1$.

Приклад 4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=x^2$, $x+y-2=0$, $y=0$, $x=0$, $z \ge 0$.



$$V=\iiint\limits_V dxdydz.$$



Проекція області інтегрування на ХоУ:

$$D:\begin{cases} 0 \le x \le 2; \\ 0 \le y \le 2-x. \end{cases}$$

$$
V:\begin{cases} 0 \le x \le 2; \\ 0 \le y \le 2-x; \\ 0 \le z \le x^2. \end{cases}
$$

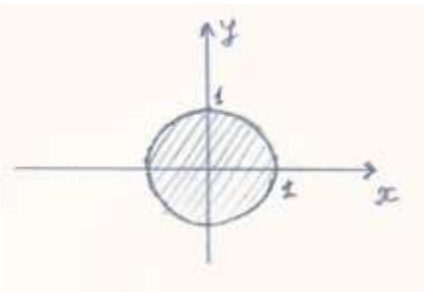
$$
V=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} dy\int\limits_0^{x^2} dz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} dy\cdot z\Big|_0^{x^2}=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} x^2dy=\int\limits_0^2 x^2dx\int\limits_0^{2-x} dy=\int\limits_0^2 x^2dx\left(2-x\right)=\int\limits_0^2\left(2x^2-x^3\right)dx=
$$

$$
=\left(2\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{1}{4}=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8-3}{12}=\frac{5}{12}.
$$

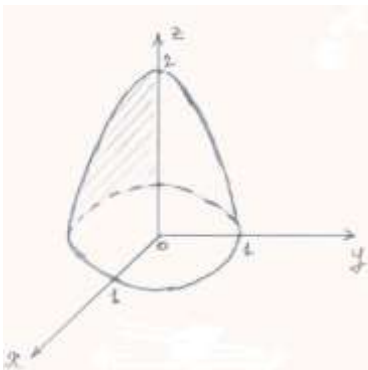
Приклад для самостійної роботи: $z=\left(k+1\right)x^2$, $x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$, $z\ge 0$.

Приклад для самостійної роботи: $z\ge 0$, $z=kx$, $y=\left(k+1\right)x$, $x=0$, $x=2$.

Приклад 5. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями: $x^2+y^2=1$, $z=2-x^2-y^2$, $z\ge 0$.



$$
D:\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi; \\ 0 \le r \le 1. \end{cases}
$$



$$V:\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi; \\ 0 \le r \le 1; \\ 0 \le z \le 2 - r^2. \end{cases}$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{2-r^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr\left(2 - r^2\right) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(2r - r^3\right) dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{4}\right) d\varphi = \frac{3}{4} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

Приклад для самостійної роботи: $x^2 + y^2 = 1$, $z = (k+1) - x^2 - y^2$, $z \ge 0$.

Приклад для самостійної роботи: $x^2 + y^2 = k^2$, $z = 0$, $z = k+1$.

Криволінійні інтеграли

Криволінійний інтеграл першого роду (по довжині дуги):

$$\iiint\limits_{L_{AB}} f(x; y; z)\, dl = \lim_{\max \Delta li \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta li \; .$$

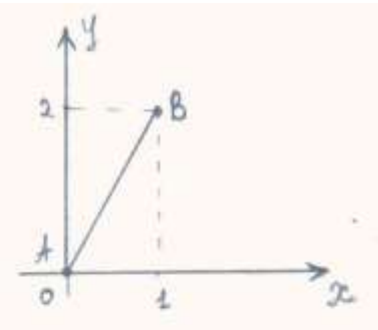
Приклад 1. Обчислити $Y\& = \int\limits_L \frac{dl}{x+2y+5}$, де L – відрізок прямої $y = 2x - 2$, що знаходиться між точками $A(0;-2)$, $B(1;0)$.

Знаходимо $dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+2^2}dx = \sqrt{5}dx$. Отже,

$$Y\& = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{x+2(2x-2)+5} = \sqrt{5}\int\limits_0^1 \frac{dx}{5x+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln|5x+1|\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\ln(6) - \ln 1\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln 6.$$

Приклад для самостійної роботи: $\int\limits_L \frac{dl}{kx+y+(2k-1)}$, де L – відрізок прямої $y = x+1$, що знаходиться між точками $A(0;1)$, $B(1;2)$.

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_L xdl$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;0)$, $B(1;2)$.



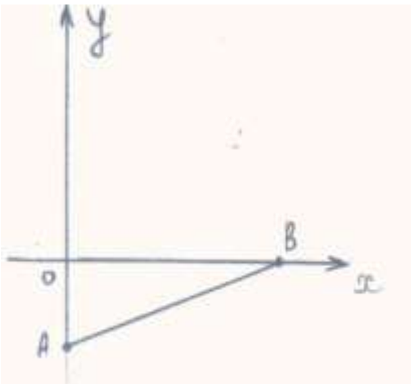
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1},\ \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{2-0},\ \frac{x}{1} = \frac{y}{2},\ y = 2x.$$

Знаходимо $dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+2^2}dx = \sqrt{5}dx$. Отже,

$$Y\& = \int\limits_0^1 x\sqrt{5}dx = \sqrt{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Приклад для самостійної роботи: $\int\limits_L kxdl$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;0)$, $B(k;k+1)$.

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де L – відрізок прямої, що з’єднує точки $A(0;-2)$, $B(4;0)$.



$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\ \frac{x-0}{4-0}=\frac{y+2}{0+2},\ \frac{x}{4}=\frac{y+2}{2},$$

$$2x=4y+8,\ 4y=2x-8,\ y=\frac{1}{2}x-2.$$

Знаходимо $dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+\frac{1}{4}}dx=\frac{\sqrt{5}}{2}dx$. Отже,

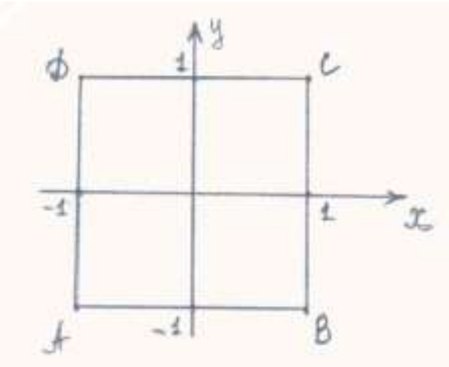
$$Y\&=\int\limits_0^4\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}dl}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}x^2-2x+4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_0^4\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}x^2-2x+4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_0^4\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}\left(x^2-\frac{8}{5}x+\frac{16}{5}\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{64}{25}}}=\ln\left|\left(x-\frac{4}{5}\right)+x\sqrt{{}^2-\frac{8}{5}x+\frac{16}{5}}\right|\Bigg|_0^1=\ln\left|\left(x-\frac{4}{5}\right)+x\sqrt{{}^2-\frac{8}{5}x+\frac{16}{5}}\right|-$$

$$-\ln\left|-\frac{4}{5}+\sqrt{\frac{16}{5}}\right|=\ln\left|\frac{16}{5}+\frac{8}{\sqrt{5}}\right|-\ln\left|\frac{4}{\sqrt{5}}-\frac{4}{5}\right|.$$

Приклад для самостійної роботи: $\int\limits_{L_{AB}}\frac{dl}{\sqrt{kx^2+y^2}}$, де L_{AB} – відрізок прямої, що з’єднує точки $A(0;0)$, $B(k;-k)$.

Приклад 4. Обчислити $\int\limits_{L} xydl$, де L – контур квадрата зі сторонами $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.



AB: $y = -1,\ dl = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1+0}dx = dx$;

$$\int\limits_{-1}^{1} x(-1)dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}(1-1) = 0.$$

BC: $x = 1,\ dl = \sqrt{1 + x'^2}dy = \sqrt{1+0}dy = dy$;

$$\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot ydy = \frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(1-1) = 0.$$

DC: $y = 1,\ dl = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1+0}dx = dx$;

$$\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(1-1) = 0.$$

DA: $x = -1,\ dl = \sqrt{1 + x'^2}dy = \sqrt{1+0}dy = dy$;

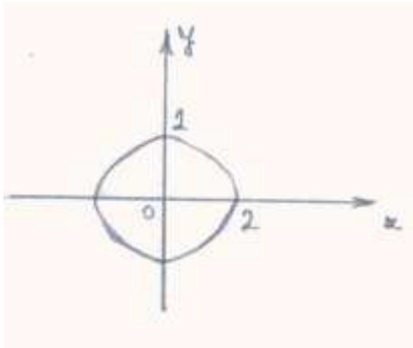
$$\int\limits_{-1}^{1} -ydy = -\frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}(1-1) = 0.$$

$$\dot{Y} = \int\limits_{L} xydl = \int\limits_{L_{AB}} xydy + \int\limits_{L_{BC}} xydy + \int\limits_{L_{DC}} xydy + \int\limits_{L_{DA}} xydy = 0+0+0+0 = 0.$$

Приклад для самостійної роботи. Обчислити $\int\limits_{L_{OABC}} xydl$, де L_{OABC} – контур прямокутника з вершинами $O(0;0)$, $A(k;0)$, $B(k;k+2)$, $C(0;k+2)$.

Приклад 5. Обчислити $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right) dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 4$.

Перейдемо до полярних координат: $x^2 + y^2 = r^2$, $r^2 = 4$, $r = 2$.



$dl = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = \sqrt{4+0}\, d\varphi = 2d\varphi$.

Отже, Y& $= \int\limits_0^{2\pi} 4 \cdot 2 \cdot d\varphi = 8\varphi \Big|_0^{2\pi} = 8(2\pi - 0) = 16\pi$.

Приклад для самостійної роботи. Обчислити $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right) dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = k^2$.

Приклад для самостійної роботи. Обчислити $\int\limits_{L_{ABO}} (x + y)\, dl$, де L_{ABO} – контур трикутника з вершинами $A(k;0)$, $B(0;k)$, $O(0;0)$.

Приклад 6. Обчислити $\int\limits_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, де L – перший виток гвинтової лінії з координатами $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 2t$.

Працюємо з лінією, що задана параметрично: $dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt$. Тоді $x_t' = -2\sin t;$ $y_t' = 2\cos t;$ $z_t' = 2.$

$dl=\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t+4}dt=\sqrt{8}dt$.

Отже,

$$Y\&=\int_0^{2\pi}\frac{4t^2\cdot\sqrt{8}dt}{4\sin^2 t+4\cos^2 t}=\frac{4\sqrt{8}}{4}\int_0^{2\pi}t^2dt=2\sqrt{2}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\left(2\pi\right)^3-0\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 8\pi^3=\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi^3.$$

Приклад для самостійної роботи. Обчислити $\int_L\frac{z^2dl}{x^2+y^2}$, де L – перший виток гвинтової лінії з координатами $x=k\cos t$, $y=k\sin t$, $z=kt$.

Приклад 7. Обчислити $\int_L xdl$, де L – дуга кривої, $r=\sin\varphi$, $0\le\varphi\le{}^{\pi}\!/_{4}$.

У полярних координатах $dl=\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi=\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}d\varphi=d\varphi$, $x=r\cos\varphi=\sin\varphi\cdot\cos\varphi$.

Отже,

$$Y\&=\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\cdot\cos 2\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin 2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\cos 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4}=-\frac{1}{4}\left(\cos 2\cdot\frac{\pi}{4}-\cos 0\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=-\frac{1}{4}\left(0-1\right)=\frac{1}{4}.$$

Приклад для самостійної роботи. Обчислити $\int_L kydl$, L – дуга кривої, $r=\left(k+1\right)\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Криволінійний інтеграл II роду (за координатами)

Якщо у просторі R^3 задано вектор $\vec{a} = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$, координати якого неперервні функції у точках орієнтованої кривої L_{AB}. Криволінійним інтегралом другого роду (або за координатами) від вектор-функції $\vec{a}(x;y;z)$ по кривій L_{AB} називають інтеграл:

$$\int\limits_{L_{AB}} \vec{a}(x;y;z)\,\vec{dl} = \int\limits_{L_{AB}} P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dz\,.$$

Приклад 1. Обчислити $\dot{Y} = \int\limits_{L_{AB}} y\,dx + (x+z)\,dy + (x-y)\,dz$, де L_{AB} – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1;-1;1)$, $B(2;3;4)$.

Запишемо параметричні рівняння прямої AB: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1} = t$,

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y+1}{3+1} = \frac{z-1}{4-1} = t\,; \quad \begin{matrix} \dfrac{x-1}{1} = t, \\ \dfrac{y+1}{4} = t, \\ \dfrac{z-1}{3} = t; \end{matrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x-1 = t, \\ y+1 = 4t, \\ z-1 = 3t; \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = t+1, & dx = dt, \\ y = 4t-1, & dy = 4dt, \\ z = 3t+1; & dz = 3dt. \end{matrix}$$

На відрізку AB параметр t змінюється [0; 1]:

$$\begin{bmatrix} x_1 = 1 & x = t+1 & 1 = t+1 & t_1 = 0 \\ x_2 = 2 & x = t+1 & 2 = t+1 & t_2 = 1 \end{bmatrix}.$$

Отже,

$$\dot{Y} = \int\limits_0^1 (4t-1)\,dt + \big((t+1)+(3t+1)\big)4\,dt + \big(t+1-(4t-1)\big)3\,dt = \int\limits_0^1 \big(4t-1+(4t+2)4+(2-3t)3\big)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (4t-1+16t+8+6-9t)\,dt = \int\limits_0^1 (11t+13)\,dt = \left(\frac{11t^2}{2} + 13t\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{11}{2}\cdot 1 + 13\cdot 1\right) = 13 + 5{,}5 = 18{,}5.$$

Приклад для самостійної роботи. Обчислити $\dot{Y} = \int\limits_{L_{AB}} y\,dx + (x+z)\,dy + (x-y)\,dz$, де L_{AB} – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;0;0)$, $B(k;-k;k)$.

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_{L_{AB}} (x-y)dx + (x+y)dy$, де L_{AB} – відрізок прямої, що з’єднує точки $A(2;3)$, $B(3;5)$.

Запишемо рівняння прямої: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \dfrac{x-2}{3-2} = \dfrac{y-3}{5-3} \Rightarrow \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2}$

$$\begin{array}{l} y-3 = 2x-4, \\ \quad y = 2x-1, \end{array} \Rightarrow dy = 2dx.$$

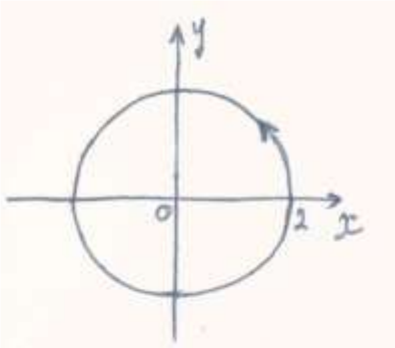
Тоді

$$I = \int_2^3 \left(\left(x-(2x-1)\right)dx + (x+2x-1)2dx\right) = \int_2^3 (-x+1+6x-2)dx = \int_2^3 (5x-1)dx = \left(5\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= \left(\frac{5}{2}\cdot 9 - 3\right) - \left(\frac{5}{2}\cdot 4 - 2\right) = \frac{45}{2} - 3 - \frac{20}{2} + 2 = \frac{25}{2} - 1 = \frac{23}{2}.$$

Приклад для самостійної роботи. Обчислити $\int\limits_{L_{AB}} (x-y)dx + (x+y)dy$, якщо L_{AB} – відрізок прямої, що з’єднує точки $A(0;0)$, $B(k;k+1)$.

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_L (x+2y)\,dx + (x-y)dy$, де L – коло з координатами $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ при додатному напрямку обходу.



$$dx = -2\sin t dt,$$
$$dy = 2\cos t dt,$$
$$t \in [0; 2\pi].$$

Отже,

$$Y\& = \int\limits_0^{2\pi} \left((2\cos t + 4\sin t)(-2\sin t)dt + (2\cos t - 2\sin t) 2\cos t dt \right) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(-4\cos t \cdot \sin t - 8\sin^2 t + 4\cos^2 t - 4\sin t \cos t \right) dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(-8\cos t \sin t - 8\sin^2 t + 4\cos^2 t \right) dt = \int\limits_0^{2\pi} \left(-4\sin 2t - 8\frac{1-\cos 2t}{2} + 4\frac{1+\cos 2t}{2} \right) dt =$$

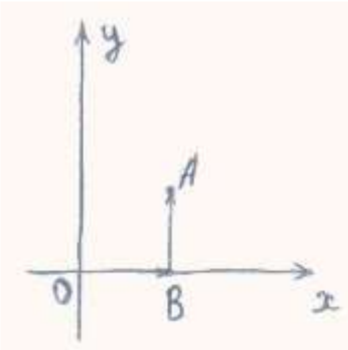
$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(-4\sin 2t - 4(1-\cos 2t) + 2(1+\cos 2t) \right) dt = \int\limits_0^{2\pi} \left(-4\sin 2t - 2 + 6\cos 2t \right) dt =$$

$$= \left(4 \cdot \frac{1}{2}\cos 2t - 2t + 6 \cdot \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Big|_0^{2\pi} = \left(2\cos 4\pi - 4\pi + 3\sin 4\pi \right) - \left(2\cos 0 - 0 + 0 \right) =$$

$$= (2 \cdot 1 - 4\pi + 0) - 2 = -4\pi.$$

Приклад для самостійної роботи. Обчислити $\int\limits_L y\,dx + x\,dy$, де L – коло з координатами $x = k\cos t$, $y = k\sin t$ при додатному напрямку обходу.

Приклад 4. Обчислити $\int\limits_{L_{OBA}} 2xydx - x^2dy$, де L_{OBA} – ламана OBA: $O(0;0)$, $B(2;0)$, $A(2;1)$.



OB: $y=0$, $dy=0$, $x \in [2;0]$;

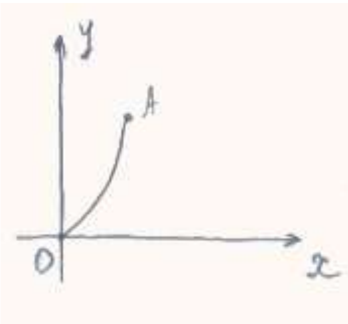
$$Y_1 = \int\limits_0^2 2 \cdot x \cdot 0 \cdot dx - x^2 \cdot 0 = 0.$$

BA: $x=2$, $dx=0$, $y \in [0;1]$;

$$Y_2 = \int\limits_0^1 \left(2 \cdot 2 \cdot y \cdot 0 - 4 \cdot dy\right) = \int\limits_0^1 \left(-4dy\right) = -4y\Big|_0^1 = -4 \cdot 1 = -4.$$

Приклад для самостійної роботи. Обчислити $\int\limits_{L_{OBA}} xdy - ydx$, де L_{OBA} – ламана OBA: $O(0;0)$, $B(k;0)$, $A(k;k+2)$.

Приклад 5. Обчислити $\int\limits_{L_{OA}} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, де L_{OA} – дуга параболи $y = 2x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;2)$.



$$dy = 4xdx;$$

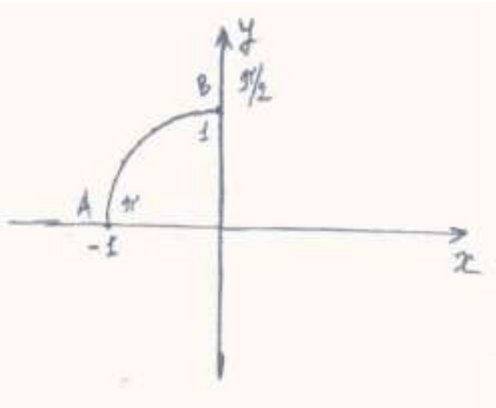
$$Y = \int\limits_0^1 \left(x \cdot 2x^2 - 4x^4\right)dx + x \cdot 4xdx = \int\limits_0^1 \left(2x^3 - 4x^4 + 4x^2\right)dx =$$

$$= \left(2\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^5}{5} + 4\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{4}{3} =$$

$$= \frac{15 - 24 + 40}{30} = \frac{31}{30}.$$

Приклад для самостійної роботи. Обчислити $\int\limits_{L_{OA}} \left(kxy-(k+1)y^2\right)dx + xdy$, де L_{OA} – дуга параболи $y = kx^2$ від точки $O(0;\,0)$ до точки $A(1;\,k)$.

Приклад 6. Обчислити $\int\limits_{L_{AB}} xdy$, де L_{AB} – дуга правого півкола $x^2+y^2=1$ від точки $A(0;\,-1)$ до точки $B(0;\,1)$.



$$x^2+y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1\cdot\cos t, \\ y = 1\cdot\sin t. \end{cases}$$

$$dy = \cos t dt\,.$$

$$Y\& = \int\limits_{\pi}^{\pi/2} \cos t\cdot\cos t dt = \int\limits_{\pi}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int\limits_{\pi}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{\pi/2}\left(1+\cos 2t\right)dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi}^{\pi/2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(\pi+\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Приклад для самостійної роботи. $\int\limits_{L_{AB}} ydx$, де L_{AB} – дуга верхнього півкола $x^2+y^2=k^2$ від точки $A(k;\,0)$ до точки $B(0;\,k)$.

Приклад для самостійної роботи. $\int\limits_L \left(x^2 - y\right) dx$, де L – контур прямокутника, утвореного прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = k$, $y = k + 1$ при додатному напрямку обходу.

Навчальне видання

4345 Робочий зошит
із дисципліни «Вища математика»
на тему «Кратні інтеграли»
для студентів усіх інженерних спеціальностей
денної форми навчання

Відповідальний за випуск І. О. Шуда
Редактор Н. З. Клочко
Комп'ютерне верстання М. А. Руденко

Підписано до друку 24.01.2018, поз.
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 1,63. Обл.-вид. арк. 0,86. Тираж 20 пр. Зам. №
Собівартість вид. грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.