Дослідити ряд на абсолютну і умовну збіжність.

Варіант 1.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+3}}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$

Варіант 2.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n+2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$.

Варіант 3.

А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{n^3+4}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$.

Варіант 4.

А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{3n-2}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Варіант 5.

А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}2^{n}}{5^{n}+1}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$.

Варіант 6.

А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{\sqrt{10n+2}}$, б). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)^{n}}$.

Варіант 7.

А) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5n-2}{3n+2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$.

Варіант 8.

А) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{n+2}{3^{n}}\right)$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$.

Варіант 9.

А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n+2}{n^2+3n-1}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2+1}{n(n+1)}$.

Варіант 10.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+3}{n^3+2n+1}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n+5}{3^n}$.

Варіант 11.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{3^n}{(2n+3)!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{3n-1}$.

Варіант 12.

А) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}$.

Варіант 13.

А) $1-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}-\dfrac{1}{7^2}+\ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)3^n}$.

Варіант 14.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{6n-5}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}$.

Варіант 15.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n}$.

Варіант 16.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{2^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n^2+1}$.

Варіант 17.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{3n^2+1}{5n^2-2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

Варіант 18.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$.

Варіант 19.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln^{n}\left(\dfrac{2n}{n+2}\right)$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n!}$.

Варіант 20.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{\ln(n+1)}$.

Варіант 21.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{5n(n+1)}$.

Варіант 22.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{\sqrt{n+2}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$.

Варіант 23.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+2}{2n}\right)^n$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$.

Варіант 24.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n^2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}}$.

Варіант 25.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin^2\frac{\pi}{3^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+5}{3^n}$.

Варіант 26.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n+1}{n(n+2)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$.

Варіант
27.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+4}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$.

Варіант 28.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{3n-2}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Варіант 29.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{5^n+1}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln(1+\frac{1}{n^2})$.

Варіант 30.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{10n+2}}$,б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$.

Розв'язання типового варіанта завдання

Дослідити на умовну й абсолютну збіжність ряди зі знакозмінними членами:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)^n}$.

Розв'язання.

$(1)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)^n};\quad (2)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)^n}\right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)^n}$. Оскільки ряд (2) знакосталий, то застосуємо до нього радикальну ознаку Коші:

$$U_n = \frac{2^n}{(n+1)^n};\ \sqrt[n]{U_n} = \frac{2}{n+1}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1$ і ряд (2) збігається. Тоді за теоремою про абсолютну збіжність ряд (1) збігається, причому абсолютно.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n}$.

Розв'язання.

Ряд (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n}$,

ряд (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n tg\frac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\frac{1}{n}$. Ряд (2) знакосталий, тому можна застосувати граничну форму ознаки порівняння. Для порівняння беремо ряд (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, тому що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{tg\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \qquad (tg\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}\quad при\ \ n\to\infty).$$

Але ряд (3) розбігається (гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається – легко перевірити за інтегральною ознакою Коші).

З розбіжності ряду (3) випливає розбіжність ряду (2). Тоді ряд (1) або розбігається, або умовно збігається. До ряду (1) застосовуємо ознаку Лейбніца:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad (a_n > 0 \ \ при \ \ всіх \ \ n)$, якщо

а) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$

б) $a_n > a_{n+1}$ для досить великих n, то знакозмінний ряд збігається.

а) $\lim_{n\to\infty} tg\frac{1}{n} = 0;$

б) оскільки $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, а функція y = tg x зростаюча, то $tg\frac{1}{n} > tg\frac{1}{n+1}$ при всіх n.

Отже, ряд (1) збігається, до того ж умовно.