Завдання складається з одного прикладу, який оцінюється у 10 балів.

Для зарахування завдання необхідно виконати щонайменше 0,5 приклада.

Умови варіантів завдань

ВАРІАНТ 1

1. Знайти потік векторного поля $\overline{a}$ через зовнішню сторону поверхні *σ:* $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{i} + z\overline{k}$, σ - частина поверхні $x^2 + y^2 = 1$, отримана в перетині з площинами *z=0, z=2.*

ВАРІАНТ 2

Знайти потік векторного поля $\overline{a}$ через зовнішню сторону поверхні *σ:* $\overline{a} = 2x\overline{i} + 4y\overline{i} - z\overline{k}$, σ - частина поверхні $x^2 + y^2 = 121$, отримана в перетині з площинами *z=10, z=11.*

ВАРІАНТ 3

Знайти потік векторного поля $\overline{a}$ через зовнішню сторону поверхні *σ:* $\overline{a} = (x + xy^2)\overline{i} + (y - yx^2)\overline{j} + (z-3)\overline{k}$ σ - частина поверхні $x^2+y^2=z^2$, отримана в перетині з площинами *z=0, z=1.*

ВАРІАНТ 4

Знайти потік векторного поля $\overline{a}$ через зовнішню сторону поверхні *σ:* $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} - z\overline{k}$, σ - частина поверхні $x^2+y^2=4$, отримана в перетині з площинами *z=0, z=4.*

ВАРІАНТ 5

Знайти потік векторного поля $\overline{a}$ через зовнішню сторону поверхні *σ:* $\overline{a} = y\overline{i} - x\overline{j} + \overline{k}$, σ - частина поверхні $x^2+y^2=z^2$ в перетині з площинами *z=0, z=-4.*

ВАРІАНТ 6

Знайти потік векторного поля $\overline{a}$ через зовнішню сторону поверхні *σ:* $\overline{a} = (x + xz)\overline{i} + y\overline{j} + (z - x^2)\overline{k}$, σ - частина поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ в перетині з площинами *z=2, z=0.*

ВАРІАНТ 7

Знайти потік векторного поля $\overline{a}$ через зовнішню сторону поверхні *σ:* $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + 2z\overline{k}$, σ - частина поверхні $x^2 + y^2 = 9$ в перетині з площинами *z=3, z=0.*

ВАРІАНТ 8

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a} = xy\bar{i} - x^2\bar{j} + 3\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2 + y^2 = z^2$ в перетині з площинами *z=-2, z=0.*

ВАРІАНТ 9

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a} = x\bar{i} + (y + yz^2)\bar{j} + (z - zy^2)\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в перетині з площинами *z=1, z=0.*

ВАРІАНТ 10

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z^3\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2 + y^2 = 16$ в перетині з площинами *z=4, z=0.*

ВАРІАНТ 11

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a} = xz\bar{i} + yz\bar{j} + (z^2-1)\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2+z^2=y^2$ в перетині з площинами *y=0, y=1.*

ВАРІАНТ 12

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a} = (x+z)\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (z-x-y)\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2+y^2+z^2=9$ в перетині з площинами *z=3, z=0.*

ВАРІАНТ 13

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + xyz\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2+y^2=25$ в перетині з площинами *z=5, z=1.*

ВАРІАНТ 14

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a} = y^2x\bar{i} + yx^2\bar{j} + z\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2+z^2=y^2$ в перетині з площинами *y= -3, y=0.*

ВАРІАНТ 15

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a} = (x+xy)\bar{i} + (y-x^2)\bar{j} + z\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2+y^2+z^2=16$ в перетині з площинами *z=0, z=4.*

ВАРІАНТ 16

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a} = (x-y)\bar{i} + (x+y)\bar{j} + z^2\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2+y^2=36$, в перетині з площинами *z=6, z=3.*

ВАРІАНТ 17

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a}=(xz+y)\bar{i}+(yz-x)\bar{j}+(z^2-2)\bar{k}$, σ - частина поверхні $y^2+z^2=x^2$ в перетині з площинами $x=0, x=2$.

ВАРІАНТ 18

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a}=(x+z)\bar{i}+y\bar{j}+(z-x)\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2+y^2+z^2=25$ в перетині з площинами $z=0, z=5$.

ВАРІАНТ 19

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a}=(x+y)\bar{i}+(x-y)\bar{j}+xyz\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2+y^2=49$ в перетині з площинами $z=0, z=4$.

ВАРІАНТ 20

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a}=xyz\bar{i}-x^2z\bar{j}+3\bar{k}$, σ - частина поверхні $y^2+z^2=x^2$ в перетині з площинами $x=-2, x=0$.

ВАРІАНТ 21

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a}=x\bar{i}+(y+yz)\bar{j}+(z-y^2)\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2+y^2+z^2=1$ в перетині з площинами $z=0, z=-1$.

ВАРІАНТ 22

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a}=(x^3+xy^2)\bar{i}+(y^3+x^2y)\bar{j}+z^2\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2+y^2=64$ в перетині з площинами $z=0, z=3$.

ВАРІАНТ 23

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a}=(x+xy)\bar{i}+(y-x^2)\bar{j}+(z-1)\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2+z^2=y^2$ в перетині з площинами $y=0, y=-4$.

ВАРІАНТ 24

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a}=(x-y)\bar{i}+(x+y)\bar{j}+z\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2+y^2+z^2=4$ в перетині з площинами $x=-2, x=0$.

ВАРІАНТ 25

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні σ: $\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}+\sin z\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2+y^2=81$ в перетині з площинами $z=3, z=6$.

ВАРІАНТ 26

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні *σ:* $\bar{a}$ *=(x+y)* $\bar{i}$ *+(x-z)* $\bar{j}$ *+(x+z)* $\bar{k}$ *,* σ - частина поверхні $y^2+z^2=x^2$ в перетині з площинами *x=0, x=10.*

ВАРІАНТ 27

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні *σ:* $\bar{a}$ *=(x+xz²)* $\bar{i}$ *+y* $\bar{j}$ *+(z-zx²)* $\bar{k}$ *,* σ - частина поверхні $y^2+x^2+z^2=9$ в перетині з площинами *y=0, y=-3.*

ВАРІАНТ 28

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні *σ:* $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + \bar{k}$, σ - частина поверхні $y^2+x^2=100$ в перетині з площинами *z=10, z=15.*

ВАРІАНТ 29

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні *σ:* $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + (z-3)\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2+y^2=z^2$ в перетині з площинами *z=-10, z=0.*

ВАРІАНТ 30

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні *σ:* $\bar{a} = (x+y)\bar{i} + (y-x)\bar{j} + z\bar{k}$, σ - частина поверхні $x^2+y^2+z^2=16$ в перетині з площинами *x=0, x=-4.*

Приклад розв'язання типового варіанта завдання

Знайти потік векторного поля $\bar{a}$ через зовнішню сторону поверхні *σ:* $\bar{a} = xz\bar{i} + yz\bar{j} + 5\bar{k}$,

σ- частина поверхні $x^2+y^2-z^2=1$, отримана в результаті перетину площинами z=0, z= –2;

Розв'язання

Поверхня незамкнена, тому знаходимо поверхневий інтеграл безпосередньо за формулою

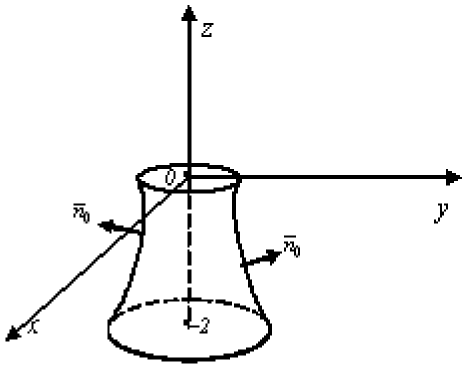
$$\Pi = \iint_\sigma \bar{a} \cdot \bar{n}_0 d\sigma =$$

$$= \iint_\sigma \big(X(x,y,z)\cos\alpha + Y(x,y,z)\cos\beta + Z(x,y,z)\cos\gamma\big) d\sigma =$$

$$= \pm\iint_\sigma \Big(-X(x,y,z)z'_x - Y(x,y,z)z'_y + Z(x,y,z)\Big)\Big|_{z=\varphi(x,y)} dxdy$$

Поверхня σ задається рівнянням $x^2+y^2-z^2=1$ або $z = -\sqrt{x^2+y^2-1}$, тоді

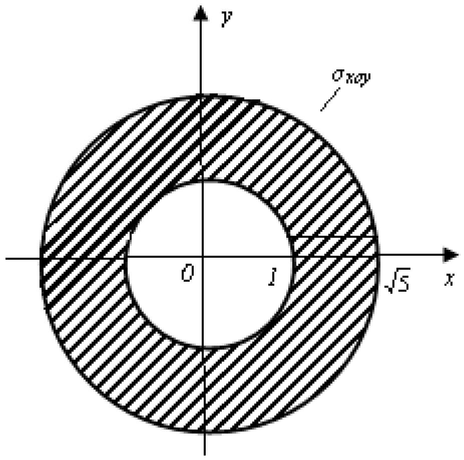
$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}.$$



Оскільки $\cos\gamma = \cos(\overline{n}_0, \widehat{\ } oz) > 0,$ *то перед подвійним інтегралом ставимо знак плюс (див. розв'язок задачі 14б).*

$$\Pi = \pm \iint_{\sigma_{xoy}} \left(-xz\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \right) - yz\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \right) + 5 \right)\Bigg|_{z=-\sqrt{x^2+y^2-1}} dxdy =$$

$$= \iint_{\sigma_{xoy}} \left(-\frac{x^2\sqrt{x^2+y^2-1}}{\sqrt{x^2+y^2-1}} - \frac{y^2\sqrt{x^2+y^2-1}}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + 5 \right) dxdy = \iint_{\sigma_{xoy}} (5 - x^2 - y^2) dxdy.$$



σ_{xoy} – проекція поверхні σ на площину ХОУ.

Знаходимо подвійний інтеграл у полярній системі координат x=rcosφ, y=rsinφ, dS=rdrdφ:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{5}} (5 - (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2) rdr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{5}} (5 - r^2) rdr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{5}} (5r - r^3) dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{5r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{25}{2} - \frac{5}{2} - \frac{25}{4} + \frac{1}{4} \right) =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} d\varphi = 4 \cdot 2\pi = 8\pi$$