

Розв'язання типового варіанта

Приклад 1. Знйти інтеграл $\int \frac{dx}{x^4}$ і перевірить результат диференціювання.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральную функцію $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$, тоді

$$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

Перевірка. Знайдемо диференціал отриманої функції:

$$\begin{aligned} d\left(-\frac{1}{3x^3} + C\right) &= d\left(-\frac{1}{3x^3}\right) + d(C) = d\left(-\frac{1}{3}x^{-3}\right) + 0 = \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^{-3}\right)' \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot (-3)x^{-3-1} \cdot dx = x^{-4} dx = \frac{dx}{x^4}. \end{aligned}$$

Порівнюючи отриманий диференціал з підінтегральним виразом даного інтеграла, впевнюємося в тому, що інтеграл знайдено вірно (згідно другій властивості невизначеного інтеграла).

Приклад 2. Знйти інтеграл $\int 4^x \cdot 5^x dx$ і перевірить результат диференціювання.

Розв'язання. Оскільки $4^x \cdot 5^x = (4 \cdot 5)^x = 20^x$, тоді отримаємо

$$\int 4^x \cdot 5^x \cdot dx = \int 20^x dx = \frac{20^x}{\ln 20} + C.$$

Перевірка. Знайдемо похідну від отриманого результату:

$$\left(\frac{20^x}{\ln 20} + C\right)' = \left(\frac{20^x}{\ln 20}\right)' + (C)' = \frac{1}{\ln 20} (20^x)' + 0 = \frac{1}{\ln 20} \cdot 20^x \cdot \ln 20 = 20^x.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x} = t$ або $x = t^2$, тоді $dx = (t^2)' dt$, $dx = 2t dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} &= \int \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int \frac{t}{1+t} dt = 2 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \int \frac{(t+1)-1}{t+1} dt = \\ &= 2 \int \left(\frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{t+1} dt = 2t - 2 \int \frac{1}{t+1} dt. \\ \int \frac{1}{t+1} dt &= \ln|t+1| + C, \end{aligned}$$

отримаємо

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = 2t - 2 \ln|t+1| + C.$$

Повертаючись до вихідної змінної інтегрування $\sqrt{x} = t$, остаточно отримаємо:

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 2 \ln|\sqrt{x} + 1| + C.$$

Можна знайти даний інтеграл інакше:

$t = 1 + \sqrt{x}$. Звідси $\sqrt{x} = t - 1$, $x = (t - 1)^2$, $dx = ((t - 1)^2)' dt$, $dx = 2(t - 1) dt$. Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} &= \int \frac{2(t-1)}{t} dt = 2 \int \left(\frac{t}{t} - \frac{1}{t}\right) dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t} = \\ &= 2t - 2 \ln|t| + C = 2(1 + \sqrt{x}) - 2 \ln|1 + \sqrt{x}| + C = 2\sqrt{x} + 2 - 2 \ln|1 + \sqrt{x}| + C. \end{aligned}$$

Отримані результати відрізняються постійним доданком 2; обидва результати правильні, оскільки, дві первісні від даної підінтегральної функції відрізняються на деяку константу.

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int x \cos x dx$

Розв'язання. $\int x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dV = \cos x dx \quad V = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\} =$
 $= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c.$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int x^2 \ln x dx$

Розв'язання.

$$\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ x^2 dx = dV \Rightarrow V = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

Умови для самостійної роботи

Варіант 1

1. $\int \frac{x^3 - 8}{x - 2} dx$. 2. $\int x \sqrt{x} dx$. 3. $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 5}$. 4. $\int \frac{dx}{x \sqrt{\ln x - 5}}$. 5. $\int x \ln x dx$. 6. $\int x^2 e^{3x} dx$.

Варіант 2

1. $\int \frac{3 + 2x^4}{5x} dx$. 2. $\int \frac{du}{2u^2 - 6}$. 3. $\int \frac{e^{2x} dx}{9 - e^{2x}}$. 4. $\int \frac{\arctg^3 2x}{\frac{1}{4} + x^2} dx$. 5. $\int x^3 \ln x dx$. 6. $\int x e^{4x} dx$.

Варіант 3

1. $\int \frac{2(2+x)}{(4x+x^2)} dx$. 2. $\int 3^x \cdot 5^x dx$. 3. $\int \frac{\arctg 3x dx}{1+9x^2}$. 4. $\int \frac{e^x dx}{1+e^x}$. 5. $\int (2x+1) \cos x dx$. 6. $\int \arccos(3x+1) dx$

Варіант 4

1. $\int 2^x \cdot 3^x dx$. 2. $\int \frac{dx}{x^3}$. 3. $\int \sin^3 x dx$. 4. $\int \frac{\sqrt{2 + \ln x} dx}{x}$. 5. $\int x^2 \cos x dx$. 6. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$.

Варіант 5

1. $\int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) dx$. 2. $\int \left(x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 7x^{\frac{1}{6}} \right) dx$. 3. $\int e^{3x^2+5} x dx$. 4. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x - 1} dx}{x}$. 5. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$. 6. $\int (5x+7) \sin x dx$.

Варіант 6

1. $\int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx$. 2. $\int \frac{(1-x) dx}{1+\sqrt{x}}$. 3. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x - 1} dx}{x}$. 4. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 5. $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$. 6. $\int \arctg x dx$.

Варіант 7

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$. 2. $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - \sqrt[7]{x}}{x} dx$. 3. $\int \frac{dx}{x(\ln 2x - 4)}$. 4. $\int \frac{2x^2 dx}{x^6 + 4}$. 5. $\int (x-1) \cos x dx$. 6. $\int 5 \arctg x dx$.

Варіант 8

1. $\int 2^x \cdot 11^x dx$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7}}$. 3. $\int \frac{dx}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}}$. 4. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2 \cos x}}$. 5. $\int \ln^2 x dx$. 6. $\int e^{-x} \cdot \cos \frac{x}{2} dx$.

Варіант 9

1. $\int \frac{7-x^3}{x^2} dx$. 2. $\int \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)^2 dx$. 3. $\int \frac{\sqrt[2]{\ln x + 1} dx}{x}$. 4. $\int \frac{\sqrt{\arccos x} dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 5. $\int (\sqrt{x} + 1) \ln x dx$.
6. $\int x^2 \cos x dx$.

Варіант 10

1. $\int \frac{x^2 - 9}{x} dx$. 2. $\int \frac{(1-x) dx}{1-\sqrt{x}}$. 3. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \cdot \sqrt{1-x^2}}$. 4. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}}$. 5. $\int x^3 \arctg x dx$. 6. $\int (x-1) \sin x dx$.

Варіант 11

1. $\int (1 + \tg^2 x) dx$. 2. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1) dx}{\sqrt[4]{x^3}}$. 3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 11}}$. 4. $\int \frac{\sqrt{\ln x - 8} dx}{x}$. 5. $\int x \ctg^2 x dx$. 6. $\int e^{3x} (2x - 3) dx$.

Варіант 12

1. $\int (x+2)(x^2-3) dx$. 2. $\int \cos 3x dx$. 3. $\int \frac{\arctg^5 2x dx}{1+4x^2}$. 4. $\int \frac{2x^3 dx}{\sqrt{4-x^8}}$. 5. $\int x^2 \ln x dx$. 6. $\int \arccos x dx$.

Варіант 13

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$. 2. $\int \sqrt[3]{7x} dx$. 3. $\int \frac{x^2 dx}{x^6 - 8}$. 4. $\int \frac{dx}{\arcsin^3 x \sqrt{1-x^2}}$. 5. $\int (\sqrt{x} + 1) \ln x dx$. 6. $\int \arcsin x dx$.

Варіант 14

1. $\int \frac{dx}{5-x^2}$. 2. $\int e^{3-5x} dx$. 3. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{3-e^{2x}}}$. 4. $\int (4-9x)^{20} dx$. 5. $\int x^2 e^{-4x} dx$. 6. $\int x \ln 5x dx$.

Варіант 15

1. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3-x}}$. 3. $\int \frac{\ln^3 x + 3}{x} dx$. 4. $\int \frac{2^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 5. $\int x^2 \cos 2x dx$. 6. $\int x \arctg x dx$.

Варіант 16

1. $\int \frac{\left(x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{5}{2}} + 7x\right) dx}{5x^6}$. 2. $\int (x + 2^{-2x}) dx$. 3. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$. 4. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt[5]{\tg x}}$. 5. $\int \ln^3 x dx$. 6. $\int \arcsin 2x dx$.

Варіант 17

1. $\int (2x + 3 \cos x) dx$. 2. $\int \left(x^2 + 2^{\frac{x+1}{2}}\right) dx$. 3. $\int \frac{\sqrt[2]{\ln^2 x + 2 \ln x + 1}}{x} dx$. 4. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^{2x} + 1}} dx$. 5. $\int x \cos x dx$. 6. $\int \arctg 3x dx$.

Варіант 18

1. $\int \frac{\left(x^{\frac{5}{4}} + x^{\frac{9}{2}} + 3x\right) dx}{5x^6}$. 2. $\int (4x^3 + 2^{x+2}) dx$. 3. $\int \frac{x^2}{5x^6 + 9} dx$. 4. $\int \frac{e^{\arctg 3x}}{1/9 + x^2} dx$. 5. $\int x^2 e^x dx$. 6. $\int e^{-2x} \sin 5x dx$.

Варіант 19

$$1. \int \frac{\left(x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{5}{2}} + 7x\right) dx}{x^2}. \quad 2. \int e^{\frac{3-7x}{3}} dx. \quad 3. \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 1}}. \quad 4. \int \frac{dx}{(1+9x^2) \arctg 3x}. \quad 5. \int x \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$6. \int e^{4x} \cos \frac{x}{3} dx.$$

Варіант 20

$$1. \int \frac{\left(x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{5}{2}} + 7x\right) dx}{2x^5}. \quad 2. \int (x + 2^{-2x}) dx. \quad 3. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 1}}. \quad 4. \int e^x \sqrt{2 + e^x} dx. \quad 5. \int x^3 \ln(x+2) dx.$$

$$6. \int e^{4x} \sin \frac{x}{3} dx.$$

Варіант 21

$$1. \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1\right) dx. \quad 2. \int (2x^3 + 5^x) dx. \quad 3. \int \frac{\sqrt{\ln x + 2}}{x} dx. \quad 4. \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2 + \cos^2 x}}. \quad 5. \int x^2 e^x dx. \quad 6. \int e^x \cos \frac{x}{3} dx.$$

Варіант 22

$$1. \int \frac{\left(x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{5}{2}} + 7x\right) dx}{4x^3}. \quad 2. \int \left(\frac{x}{3} + 8^{-2x}\right) dx. \quad 3. \int \frac{3^{\ln x + 2}}{x} dx. \quad 4. \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}. \quad 5. \int x^3 \operatorname{arctg} x dx.$$

$$6. \int e^{4x} \sin x dx.$$

Варіант 23

$$1. \int (8x^7 + 6x^5 - 3x^2 + 4) dx. \quad 2. \int (2x^4 + 4x + 15^x) dx. \quad 3. \int \frac{2^{\operatorname{arctg} x} dx}{1 + x^2}. \quad 4. \int \frac{(1 - \ln^3 x) dx}{x}. \quad 5. \int (x-3) \sin 2x dx. \quad 6. \int e^{2x} \cos \frac{x}{4} dx.$$

Варіант 24

$$1. \int \frac{x^3 - 5x^2 + 7\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx. \quad 2. \int (\cos x + \sin x)^2 dx. \quad 3. \int \frac{\sqrt[3]{1 - \ln x} dx}{x}. \quad 4. \int \frac{x^4 dx}{1 - x^{10}}. \quad 5. \int (x^2 + 2) \sin x dx. \quad 6. \int \arccos \frac{x}{3} dx.$$

Варіант 25

$$1. \int \frac{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{5}{2}} + 7x dx}{7x^4}. \quad 2. \int (x + 2 \cos 3x) dx. \quad 3. \int \frac{2x^3 dx}{\sqrt{4 - x^8}}. \quad 4. \int e^{\operatorname{ctg} x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x}. \quad 5. \int x^5 \ln x dx. \quad 6. \int e^{5x} \cos \frac{x}{3} dx.$$

Варіант 26

$$1. \int \frac{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{5}{2}} + 7x dx}{9\sqrt{x}}. \quad 2. \int (x^2 + \sin 3x) dx. \quad 3. \int \frac{dx}{x\sqrt{5 + \ln x}}. \quad 4. \int \frac{3 - \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx. \quad 5. \int x^3 3^x dx. \quad 6. \int e^{4x} \sin \frac{2x}{3} dx.$$

Варіант 27

$$1. \int \frac{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{5}{2}} + 7x dx}{15\sqrt[3]{x}}. \quad 2. \int (x + 6^{-x}) dx. \quad 3. \int \frac{\arcsin 2x dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}. \quad 4. \int \frac{\cos x}{\sin^{15} x} dx. \quad 5. \int x^2 5^x dx. \quad 6. \int e^x \cos \frac{x}{2} dx.$$

Варіант 28

$$1. \int \frac{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{5}{2}} + 7x dx}{12x^9}. \quad 2. \int 3^{\frac{2-x}{2}} dx. \quad 3. \int \frac{dx}{(1+25x^2)\arctg 5x}. \quad 4. \int \frac{x^6 dx}{7+x^{14}}. \quad 5. \int x \arctg 2x dx. \quad 6. \int e^{7x} \cos \frac{x}{3} dx.$$

Варіант 29

$$1. \int \frac{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{5}{2}} + 7x dx}{3x^7}. \quad 2. \int (x + \cos(2x+1)) dx. \quad 3. \int \frac{(\arctg^3 x + 2) dx}{x^2 + 1}. \quad 4. \int x \sqrt{3-x^2} dx. \quad 5. \int x^2 e^{-2x} dx. \quad 6. \int e^{4x} \cos 2x dx.$$

Варіант 30

$$1. \int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx. \quad 2. \int (\sin 3x + \cos 3x)^2 dx. \quad 3. \int \frac{2^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 4. \int \frac{4 \sin 2x dx}{\sqrt{4 + \cos^2 x}}. \quad 5. \int x \ln^2 x dx. \quad 6. \int e^{4x} \cos 3x dx.$$